MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaire ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME I (08 points)

Dans tout le problème, quand on demande de construire une figure, il est entendu qu'il s'agit d'une construction à la règle et au compas ; quand on parle de polygone régulier, il est convexe et le mot convexe est sous-entendu. On appelle point constructible tout point construit à l'aide de points donnés en n'usant que de la règle et du compas. Une droite constructible est une droite joignant deux points constructibles. Un cercle constructible est un cercle centré en un point constructible et dont le rayon est la distance de deux points constructibles

PARTIE 1

Soient O et A deux points donnés, distincts, du plan.

1.1 En traçant les figures correspondantes, montrer que les sommets des carrés admettant O et A comme sommets consécutifs ou non sont constructibles.

1.2 Soit J un point constructible autre que O et A.

a) Construire un point J_1 vérifiant $OJ.OJ_1 = OA^2$.

b) Construire un point J_2 vérifiant $OJ_2^2 = OA.OJ$.

1.3 **Une construction du pentagone régulier par la méthode des cercles tangents**.

a) Sachant que la somme des racines cinquièmes de l'unité est nulle, démontrer que $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$.

Placer dans une autre figure :

- Les points O et A et le cercle $\mathscr{C}_1$ de centre O, de rayon r, passant par A.
- A' le symétrique de A par rapport à O, I le milieu d'un rayon perpendiculaire au diamètre (AA').
- $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre I et de rayon $\frac{r}{2}$.
- Les points P et Q intersections de la droite (A'I) et du cercle $\mathscr{C}_2$ tels que Q $\in$ [A'I].
- Les cercles $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_4$ de centre A' tangente à $\mathscr{C}_2$ (le cercle $\mathscr{C}_3$ est tangent intérieurement au cercle $\mathscr{C}_2$ en P et le cercle $\mathscr{C}_4$ est tangent extérieurement à $\mathscr{C}_2$ en Q).
- Les points B et E intersections des cercles $\mathscr{C}_3$ et $\mathscr{C}_1$.
- Les points C et D intersections des cercles $\mathscr{C}_4$ et $\mathscr{C}_1$.

Nous allons montrer que A, B, C, D et E sont les sommets d'un pentagone régulier inscrit au cercle $\mathscr{C}_1$. Pour cela choisissons r = 1 et munissons le plan complexe du repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ tel que $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.
Soit $\omega = e^{i\theta}$ l'affixe de B.

b) Montrer que : $A'B = |1 + \omega| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

c) En déduire que $\cos\theta = \frac{\sqrt{5}-1}{4}$ puis conclure.

1.4 **Exploration de polygones réguliers constructibles**.

On note P_n le polygone régulier à n cotés de centre O dont un sommet est A : on dira que P_n est constructible si tous les sommets le sont.

a) Montrer que P_{2n} est constructible si et seulement si P_n est constructible. On peut donc désormais se limiter au cas où n est impair.
b) Tracer sur une même figure P_3 et P_5, montrer que P_{15} est constructible puis construire P_{15}.

PARTIE 2 : Tracé de P_7

Dans le repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$ les sommets de P_7 ont pour affixes les racines septièmes de l'unité.
On pose $\alpha = \exp\left(i\frac{2\pi}{7}\right)$, $s = \alpha + \alpha^2 + \alpha^4$ et $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$.

2.1 Calculer $s + \bar{s}$ où $\bar{s}$ désigne le conjugué de s. Calculer $s\bar{s}$ puis déterminer s.

2.2 Montrer que α, α^2, α^4 sont les racines de l'équation :

$$z^3 - sz^2 + \bar{s}z - 1 = 0$$

Et que α^3, α^5, α^6 sont racines de l'équation :

$$z^3 - \bar{s}z^2 + sz - 1 = 0$$

Comment pourrait-on retrouver les valeurs de $s + \bar{s}$ et $s\bar{s}$?

2.3 Vérifier que le produit $(z - 1)(z - s)$ considéré comme fonction de z prend en α, α^2, α^4 des valeurs imaginaires pures.
Ceci nous mène à chercher l'ensemble $\mathscr{A}$ des points du plan d'affixe z tels que $(z - 1)(z - s)$ soit imaginaire pur et à étudier ses intersections avec $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O passant par le point A.
Donner une équation cartésienne de $\mathscr{A}$, reconnaître cet ensemble et en proposer une construction point par point.
Sur une figure (OA = 4 cm), construire $\mathscr{A}$ et l'heptagone P_7.

PROBLEME II
PARTIE I

1. Etablir pour tout réel θ, les formules suivantes : $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$;
$\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$; $\cos 4\theta = 8\cos^4\theta - 8\cos^2\theta + 1$;
$\cos 5\theta = 16\cos^5\theta - 20\cos^3\theta + 5\cos\theta$

2. On considère les fonctions polynômes définies sur IR par : $t_2(x) = 2x^2 - 1$; $t_3(x) = 4x^3 - 3x$; $t_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$; $t_5(x) = 16x^5 - 20x^3 + 5x$.
   a) Résoudre dans IR les équations $t_4(x) = 0$ et $t_5(x) = 0$.
   b) En déduire les valeurs exactes de : $\cos\frac{\pi}{10}$, $\sin\frac{\pi}{10}$; $\cos\frac{\pi}{5}$; $\sin\frac{\pi}{5}$; $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$ après avoir résolu les équations : $\cos k\theta = -1$; $\cos k\theta = 0$; $\cos k\theta = 1$ pour $k \in \{4,5\}$.

3. a) Démontrer que : $\forall x \in [-1 ; 1]$, $|t_k(x)| \leq 1$ pour $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.
   b) Dresser les tableaux de variation des fonctions t_2, t_3, t_4 et t_5.

4. a) Démontrer que, si $|x| \geq 1$ alors $|t_k(x)| \geq 1$ pour $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.
   b) En déduire que $x \in [-1, 1]$ si et seulement si $t_k(x) \in [-1, 1]$ pour $k \in \{2, 3, 4, 5\}$.

.../...3

5. a) Déterminer $t_2 \circ t_3$ et $t_3 \circ t_2$ puis $t_2 \circ t_4$ et $t_4 \circ t_2$.

   b) Soit $p(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a \neq 0$.
   Montrer que, si $p \circ t_2 = t_2 \circ p$, alors $p = t_2$ et que, si $t_3 \circ p = p \circ t_3$ alors $|p| = t_3$.

   c) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_4(x) = 2xt_3(x) - t_2(x)$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_5(x) = 2x\, t_4(x) - t_3(x)$.
   Proposer alors une expression de $t_0(x)$ et $t_1(x)$.

PARTIE II

On définit par récurrence les polynômes t_n par : pour tout $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$
$\forall x \in \mathbb{R}$, $t_n(x) = 2x\, t_{n-1}(x) - t_{n-2}(x)$
et : $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_0(x) = 1$; $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_1(x) = x$.

1. Démontrer par récurrence que t_n est une fonction polynôme de degré n, paire si n est pair et impaire si n est impair.

2. a) Etablir que le terme de degré n de t_n a pour coefficient 2^{n-1}.
   b) Démontrer que $t_n(1) = 1$ et $t_n(-1) = (-1)^n$.

3. a) Etablir, pour tout réel θ, la formule :
   $\cos n\theta = 2 \cos\theta \cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$
   b) E déduire alors que, pour tout entier n et pour tout réel θ : $t_n(\cos\theta) = \cos n\theta$.
   Exprimer $\cos 6\theta$, $\cos 7\theta$ et $\cos 8\theta$ en fonction de $\cos\theta$.

4. a) Montrer que, dans l'intervalle $[0 ; \pi]$, l'équation $\cos n\theta = 0$ admet n solutions distinctes α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$ avec $\alpha_k = (2k-1)\frac{\pi}{2n}$.
   b) En déduire que, dans l'intervalle $[-1, 1]$, l'équation $t_n(x) = 0$ admet n solutions distinctes x_1, $x_2, \ldots, x_n$. On exprimera x_k en fonction de α_k pour $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$

   c) Donner alors la forme factorisée de $t_n(x)$, $\forall x \in [-1, 1]$.
   Montrer alors que l'on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_n(x) = 2^{n-1}(x-x_1)\ldots(x-x_n)$.

5. Soient n et m deux entiers. Démontrer que, pour tout réel θ : $t_n(\cos m\theta) = \cos(nm\theta)$. En déduire que : $\forall x \in [-1, 1]$, $(t_n \circ t_m)(x) = (t_m \circ t_n)(x) = t_{mn}(x)$.

6. a) Démontrer que $t_n \circ t_m$ et $t_m \circ t_n$ sont des fonctions polynômes de degré nm admettant les mêmes zéros z_k, $k = 1, 2, \ldots, mn$ que l'on précisera.

   b) En déduire qu'il existe deux réels a et b tels que :

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $(t_n \circ t_m)(x) = a(x - z_1)\ldots(x - z_{nm})$
   $\forall x \in \mathbb{R}$, $t_m \circ t_n(x) = b(x - z_1)\ldots(x - z_{nm})$

   c) vérifier que : $(t_n \circ t_m)(1) = t_m \circ t_n)(1) = t_{nm}(1)$
   En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall m \in \mathbb{N}$, $t_n \circ t_m = t_m \circ t_n$.

PARTIE III

1) Vérifier que, si $|x| \leq 1$ alors $|t_n(x)| \leq 1$.

2) a) Calculer : $\frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$ pour $n \in \{0, 1, 2\ 3, 4\}$ et $|x| > 1$.
   b) démontrer que : si $|x| > 1$, alors $t_n(x) = \frac{1}{2}\left[\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^n + \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)^n\right]$.

3) a) Etablir que, si $A > 1$ alors $\frac{1}{2}\left(A + \frac{1}{A}\right) > 1$.
   En déduire que si $x > 1$, alors $t_n(x) > 1$; puis : Si $x < -1$, alors $|t_n(x)| > 1$.

.../...4
..../

b) Etablir alors que $\forall$ n $\in$ IN, $|x| \leq 1$ si et seulement si $|t_n(x)| \leq 1$.

4) Pour toute fonction p, on note $\underset{[-1;1]}{\text{Sup}}|p|$ la plus grande valeur atteinte par $|p(x)|$ quand x décrit [-1, 1].

a) Calculer $\underset{[-1;1]}{\text{Sup}}|p|$ dans les cas suivants : p(x) = - 2x + 5 ;

$p(x) = x^2 + 5x$; $p(x) = 4x^3 - 3x$; $p(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1$

b) Déterminer, $\underset{[-1;1]}{\text{Sup}}|t_n|$ en fonction de n.

PROBLEME 1 (08 points)

Partie 1 **(06,5 points)**

1-1)	01 pt
1-2) -a)	0,75 pt
-b)	0,75 pt
1-3) -a)	01,25 pt
-b)	0,5 pt
-c)	0,75 pt
1-4) -a)	0,5 pt
-b)	01 pt

Partie 2 **(1,5 points)**

2-1)	0,5 pt
2-2)	0,5 pt
2-3)	0,5 pt

PROBLEME 2 (12 points)

Partie I (04,75 points)

1)	0,5 pt
2) -a	0,25 pt
-b	0,5 pt
3) -a	0,5 pt
-b	0,5 pt
4) -a	0,5 pt
-b	0,5 pt
5) -a	0,5 pt
-b	0,5 pt
-c	0,5 pt

Partie II (04,5 points)

1)	0,5 pt
2) -a	0,25 pt
-b	0,25 pt
3) -a	0,25 pt
-b	0,5 pt
4) -a	0,25 pt
-b	0,5 pt
-c	0,5 pt
5)	0,5 pt
6) -a	0,25 pt
-b	0,25 pt
-c	0,5 pt

Partie III (02,75 points)

1)	0,25 pt
2) -a	0,25 pt
-b	0,5 pt
3) -a	0,5 pt
-b	0,5 pt
4) -a	0,25 pt
-b	0,5 pt