UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

13 G 18 Bis AR
Durée : 4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Exercice 1.

1. a.
Par hypothèse, $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}\ [2\pi]$.

Le point D est tel que le triangle ABD soit isocèle rectangle direct de sommet principal B, donc :

$$(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD}) = \frac{\pi}{4}\ [2\pi].$$

Alors $(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}) = (\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AD})[2\pi]$. Cela entraîne que les points A, C et D sont alignés. (On peut même ajouter que C et D appartiennent à une même demi droite droite d'origine A.)

b. Notons d'abord que $r_A(B) = C$

$$r_A \circ r_B(B) = r_A(B) = C$$
$$r_A \circ r_B(D) = r_A(A) = A$$

Donc l'image du segment $[BD]$ par $r_A \circ r_B$ est le segment $[CA]$.

La somme des angles de r_A et r_B est $\pi/4 + \pi/2 = 3\pi/4$. Cette somme étant non nulle modulo 2π, $r_A \circ r_B$ est une rotation. Soit J son centre .

$r_A \circ r_B(B) = C$ entraîne J appartient à la médiatrice de $[BC]$ c'est à dire la hauteur du triangle ABC issue de A.

$r_A \circ r_B(D) = A$ entraîne J appartient à la médiatrice de $[DA]$ c'est à dire la hauteur du triangle BDA issue de B ; c'est aussi la hauteur du triangle ABC issue de B.

J est donc le point de concours des hauteurs du triangle ABC c'est l'orthocentre H de ce triangle.

2. a. Les droites (HC) et (BD) sont parallèles car elles sont perpendiculaires à la droite (AB).

b.

Antécédent	B_1	C	H
Image par h_1	B_1	D	B

Antécédent	B_2	D	B
Image par h_2	B_2	H	C

On sait déjà que $h_1(C) = D$.

La droite (CH) étant parallèle à la droite (DB), on a $h_1(H) = B$.

l'image du segment $[CH]$ par la similitude h_1 est donc le segment $[DB]$.

On sait déjà que $h_2(D) = H$.

La droite (CH) étant parallèle à la droite (DB), on a $h_2(B) = C$.

l'image du segment $[DB]$ par la similitude h_2 est donc le segment $[HC]$.

En fait on remarque que

$h_1 \circ h_2$ échange D et B ; c'est donc une homothétie de rapport -1 i.e une symétrie centrale.

De même,

$h_2 \circ h_1$ échange C et H ; c'est donc une homothétie de rapport -1 i.e une symétrie centrale.

$h_1 \circ h_2(D) = B$ entraîne :

le centre de $h_1 \circ h_2$ est le milieu du segment $[BD]$.

$h_2 \circ h_1(C) = H$ entraîne :

le centre de $h_2 \circ h_1$ est le milieu du segment $[CH]$.

c. D'après ce qui précède I_1 est le milieu du segment $[BD]$ et I_2 celui du segment $[CH]$.

L'image du segment $[CH]$ par h_1 étant le segment $[DB]$, le milieu I_2 de $[CH]$ a pour image par h_1 le milieu I_1 de $[BD]$. Par conséquent les points $I_1,\ I_2$ et B_1 centre de h_1 sont alignés.

L'image du segment $[DB]$ par la similitude h_2 étant le segment $[CH]$, le milieu I_1 de $[DB]$ a pour image par h_2 le milieu I_2 de $[CH]$. Par conséquent les points $I_1,\ I_2$ et B_2 centre de h_2 sont alignés.

Conclusion : les quatre points $I_1,\ I_2,\ B_1$ et B_2 sont alignés.

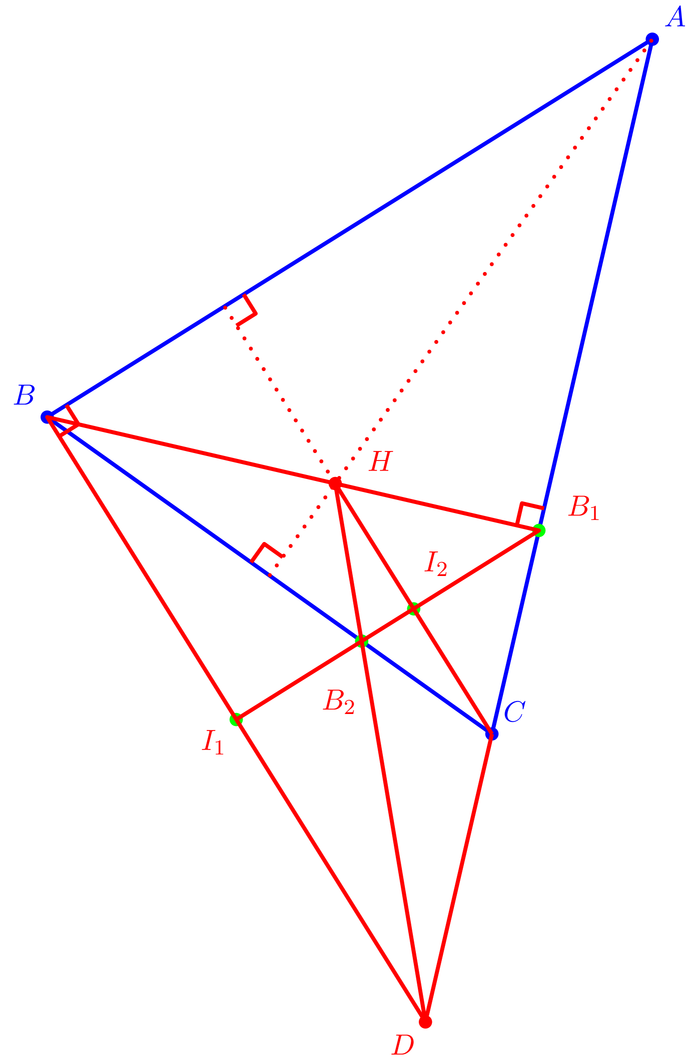

FIGURE 1

Exercice 2.

1. a. le couple $(u, v) = (-1, 1)$ vérifie $5u + 6v = 1$.

On en déduit en mutipliant par 29, que $(x_0, y_0) = (-29, 29)$ est une solution particulière de (E).

b. Si (x, y) est une solution quelconque de (E), on a :

$$\begin{array}{rcl} 5x_0 + 6y_0 & = & 29 \\ 5x + 6y & = & 29 \end{array}$$

et en faisant la différence membre à membre : $5(x-x_0)+6(y-y_0) = 0$ i.e $5(x-x_0) = -6(y-y_0)$. Donc 6 divise $5(x - x_0)$, et comme il est premier avec 5, il doit diviser $x - x_0$ (théorème de Gaus). Il existe un entier p tel que $x - x_0 = 6p$ et la relation $5(x - x_0) = -6(y - y_0)$ devient $y - y_0 = -5p$.

L'ensemble des solutions de (E) est donc $\{(6p - 29, -5p + 29), p \in \mathbb{Z}\}$

c. La droite $\mathcal{D}$ a pour système d'équations $\left\{ \begin{array}{rcl} 5x + 6y + 4z & = & 29 \\ z & = & 0 \end{array} \right.$.

Par conséquent dans le plan $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ elle a pour équation $5x+6y = 29$. Voici sa représentation graphique.

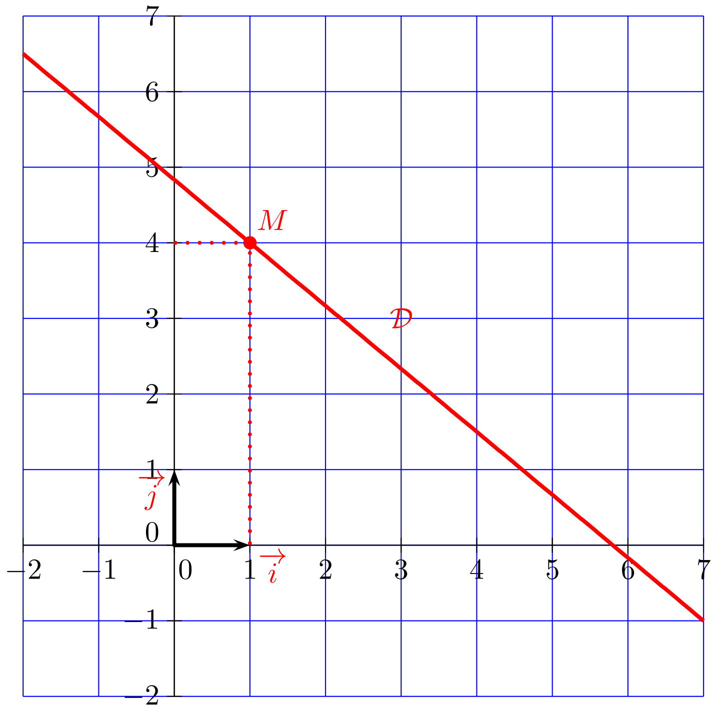

FIGURE 2. La droite $\mathcal{D}$ et son unique point aux coordonnées entiers naturels

Si M est un point de $\mathcal{D}$ aux coordonnées $(x, y, 0)$ entières, le couple (x, y) est solution de (E).

Si de plus ces entiers sont *positifs* , il existe un entier p tel que

$$x = 6p - 29 \geq 0 \text{ et } y = -5p + 29 \geq 0$$

i.e $29/6 \leq p \leq 29/5$ et $p = 5$.

Il existe donc un seul point de $\mathcal{D}$ ayant ses coordonnées dans $\mathbb{N}^3$.

De plus $x = 6 \times 5 - 29 = 1$ et $y = -5 \times 5 - 29 = 4$.

Les coordonnées de l'unique point de $\mathcal{D}$ dont les coordonnées sont des entiers naturels sont $(1, 4, 0)$ (voir figure).

2. a. Si M est un point de $\mathcal{P}$ aux coordonnées (x, y, z) entières, on doit avoir

$5x = 29 - 6y - 4z$ et comme le deuxième membre de cette égalité est un nombre impair, x doit être impair.

b. Si $x = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$, la relation précédente devient : $10p + 4z = -6y + 24$.

Mais $10 \equiv 1[3]$ et $4 \equiv 1[3]$ entraîne $p + z \equiv 10p + 4z = -6y + 24 \equiv 0[3]$

PROBLEME. Partie A

Posons pour simplifier, $u_a(x) = x^2 - 2x\cos a + 1$.

1. a.

$$\forall x \in \mathbb{R},\ x \in D_{f_a} \Leftrightarrow x^2 - 2x\cos a + 1 > 0$$

Cette dernière relation est une inéquation du second degré. Son discriminant réduit

$$\Delta' = \cos^2 a - 1 = -\sin^2 a$$

est négatif ou nul.

- Si $\Delta' = 0$ c'est à dire $a = 0$ ou π, le trinôme $x^2 - 2x\cos a + 1$ est positif ou nul et s'annule seulement si $x = \cos a$; donc $D_{f_a} = \mathbb{R} \setminus \{\cos a\} = \begin{cases} \mathbb{R} \setminus \{1\} & \text{si } a = 0 \\ \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \text{si } a = \pi \end{cases}$.

- Si $\Delta' < 0$ c'est à dire $a \in]0,\ \pi[$, le trinôme $x^2 - 2x\cos a + 1$ est strictement positif ; donc $D_{f_a} = \mathbb{R}$.

b. Quand x tend vers $+\infty$, $u_a(x)$ a pour limite $+\infty$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f_a(x) = \lim\limits_{x\mapsto+\infty} \ln(u_a(x)) = +\infty$.

$$\begin{aligned}
\forall x \in D_{f_a},\ x \neq 0 \Rightarrow \quad \frac{f_a(x)}{x} &= \frac{\ln(u_a(x))}{x} \\
&= \frac{\ln\Big(x^2(1 - 2\cos a/x + 1/x^2)\Big)}{x} \\
&= \frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln(1 - 2\cos a/x + 1/x^2)}{x} \\
&= 2\frac{\ln|x|}{x} + \frac{\ln(1 - 2\cos a/x + 1/x^2)}{x}
\end{aligned}$$

Quand x tend vers $+\infty$, le premier et le deuxième terme ont chacun pour limite 0, donc $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \dfrac{f_a(x)}{x} = 0$.

2. a. Pour tout $a \in \mathbb{R}$, si $x \in D_{f_a}$, $2\ \cos a - x \in D_{f_a}$ et

$$\begin{aligned}
f_a(2\ \cos a - x) &= \ln\Big((2\ \cos a - x)^2 - 2(2\ \cos a - x)\cos a + 1\Big) \\
&= \ln(x^2 - 2\,x\cos a + 1) \\
&= f_a(x)
\end{aligned}$$

Donc C_a admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \cos a$.

b. $f_{\pi-a}$ et f_a ont le même ensemble de définition parce que $\cos(\pi - a) = -\cos a$ est différent de 0 si et seulement si $\cos a$ est différent de 0 ; de plus, pour tout $x \in D_{f_a}$,

$$\begin{aligned}
f_{\pi-a}(x) &= \ln(x^2 - 2x(-\cos a) + 1) \\
&= f_a(-x)
\end{aligned}$$

Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in C_{\pi-a} &\Leftrightarrow y = f_{\pi-a}(x) \\
&\Leftrightarrow y = f_a(-x) \\
&\Leftrightarrow M'(-x, y) \in C_a
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{\pi-a}$ sont symétriques par rapport à la droite $(O,\ \overrightarrow{j})$ c'est à dire l'axe des ordonnées.

c. Soit $M(x, y)$ un point du plan.

$$\begin{aligned}
M \in C_a \cap C_{a'} &\Leftrightarrow \begin{cases} M \in C_a \\ M \in C_{a'} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = fa(x) \\ y = f_{a'}(x) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = fa(x) \\ f_a(x) = f_{a'}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = fa(x) \\ \ln(u_a(x)) = \ln(u_{a'}(x)) \end{cases} \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} y = fa(x) \\ u_a(x) = u_{a'}(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = fa(x) \\ x(\cos a - \cos a') = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Puisque $\cos a - \cos a'$ ne s'annule pas si a et a' sont différents et appartiennent à $[0, \pi]$, la dernière relation est équivalent à $x = 0$ et $y = f_a(0) = 0$.

Par conséquent $\boxed{\mathcal{C}_a \cap \mathcal{C}_{a'} = \{O\}.}$

3. a. $\forall x \in D_{f_0} = \mathbb{R} \setminus \{1\},\ f_0(x) = \ln(x^2 - 2\,x + 1) = \ln(x-1)^2 = 2\ \ln|x-1|$. La fonction f_0 est donc dérivable sur D_{f_0} et $\forall x \in D_{f_0},\ f_0'(x) = \dfrac{2}{x-1}$.

Voici le tableau de variations de f_0.

x	0	1	$+\infty$
$f_0'(x)$	$-$	‖	$+$
$f_0(x)$	$+\infty \searrow -\infty$	‖	$-\infty \nearrow +\infty$

b. $\mathcal{C}_\pi$ est le symétrique de $\mathcal{C}_0$ par rapport à l'axe des ordonnées.

Voici les courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_\pi$.

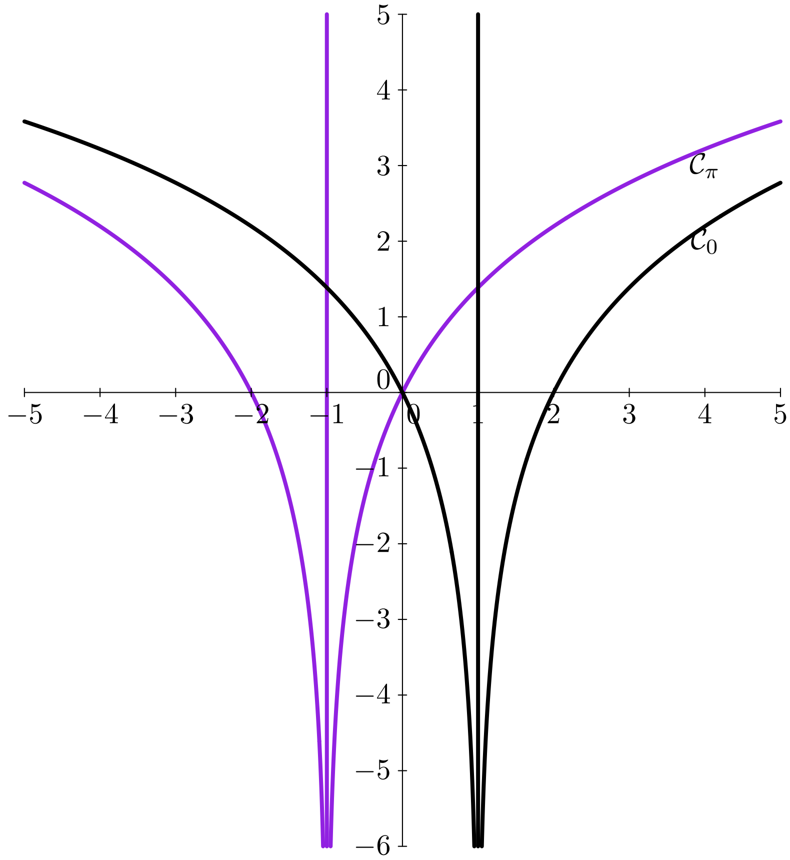

FIGURE 3. Courbes $\mathcal{C}_0$ et $\mathcal{C}_\pi$.

4. a. $\forall x \in D_{f_a} = \mathbb{R},\ f_a(x) = \ln(u_a(x))$. La fonction f_a est donc dérivable sur D_{f_a} et $\forall x \in D_{f_a},\ f_a'(x) = \dfrac{u_a'(x)}{u_a(x)} = 2\dfrac{x - \cos a}{u_a(x)}$.

Voici le tableau de variations de f_a.

x	0		$\cos a$		$+\infty$
$f'_a(x)$		$-$	0	$+$	
$f_a(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$2\ln(\sin a)$	$\nearrow$	$+\infty$

b.

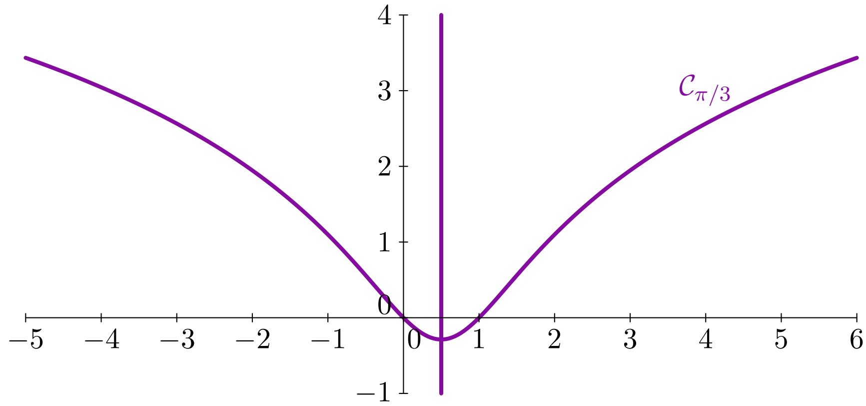

FIGURE 4. Courbe $\mathcal{C}_{\pi/3}$.

Partie B

Posons pour tout nombre complexe z : $P(z) = z^{2n} - 1$

1. a. Pour résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$, remarquons qu'elle est équivalente à $z^{2n} = 1$.
Donc si un nombre complexe z est solution, on doit avoir $|z^{2n}| = 1$ c'est à dire $|z| = 1$.
z est alors de la forme $z = \mathrm{e}^{i\theta}$, θ étant un nombre réel à déterminer (modulo 2π).
L'équation précédente est alors équivalente à :

$$\mathrm{e}^{2in\theta} = \mathrm{e}^{i2\pi} \quad \text{c'est à dire} \quad \exists k \in \mathbb{Z} : \ \theta = \frac{k\pi}{n}$$

Pour avoir toute les valeurs possibles de θ modulo 2π il suffit de prendre k dans l'ensemble $\{0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1\} = I$ et alors

l'ensemble des solutions de l'équation est $S = \{z_k, k \in I\}$ avec $z_k = \mathrm{e}^{(k/n)\ i\pi}$

b. Soit k un entier et $k' = 2n - k$.

$$\begin{aligned} k \in \{1,\ \ldots,\ n-1\} \ &\Leftrightarrow\ 1 \leq k \leq n-1 \\ &\Leftrightarrow\ -n+1 \leq -k \leq -1 \\ &\Leftrightarrow\ n+1 \leq 2n-k \leq 2n-1 \\ &\Leftrightarrow\ k' \in \{n+1,\ \ldots,\ 2n-1\} \end{aligned}$$

k' appartient donc à l'ensemble $I_2 = \{n+1, \ldots, 2n-1\}$.
$z_0 = \mathrm{e}^{(0/n)\ i\pi} = 1$ et $z_n = \mathrm{e}^{(n/n)\ i\pi} = -1$; et si $k \in I_1$ alors $k' = 2n - k$,

$$z_{k'} = \mathrm{e}^{(2n-k/n)\ i\pi} = \mathrm{e}^{(-k/n)\ i\pi} = \overline{z_k}$$

on en déduit que

$$z_k\ z_{k'} = z_k\ \overline{z_k} = 1 \text{ et } z_k + z_{k'} = 2\mathrm{R}_e\ (z_k) = 2\ \cos\frac{k\pi}{n}.$$

Donc

$$(z - z_k)(z - z_{k'}) = z^2 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + 1$$

a des coefficients réels qui sont 1, $-2\cos\dfrac{k\pi}{n}$ et 1.

c. Puisque les racines de $P(z)$ sont les z_k, $k \in \{0, \ \ldots, \ 2n-1\}$ et que le coefficient du monôme z^{2n} est 1, on a bien

$$\forall z \in \mathbb{C}, \ P(z) = (z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_k)\ldots(z - z_{2n-1})$$

I_1 et I_2 ont le même nombre d'éléments $n-1$ et on a

$$\begin{aligned} P(z) &= (z - z_0)(z - z_n)(z - z_1)(z - z_{2n-1})\ldots(z - z_k)(z - z_{k'})\ldots(z - z_{n-1})(z - z_{n+1}) \\ &= (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}(z - z_k)(z - z_{k'}) \\ &= (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\Big(z^2 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + 1\Big) \end{aligned}$$

Donc $P(z) = z^{2n} - 1$ est bien le produit des polynômes à coefficients réels

$$z^2 - 1, \ z^2 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + 1, \ k = 1\ldots, \ k = n-1$$

dont le degré est égal à 2.

2. Pour tout entier naturel n non nul on considère $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f_{(k\pi)/n}(x)$ où x est un réel.

Pour que S_n soit définie en un point x, il faut et il suffit que x appartienne à l'ensemble de définition de $f_{(k\pi)/n}$, $\ k = 1\ldots, \ , n-1$; lequel est égal à $\mathbb{R}$ puisque si $k \in \{1, \ldots, n-1\}$ alors $\dfrac{k\pi}{n}$ est différent de 0 et de π.

Donc S_n est définie sur $\mathbb{R}$. De plus chaque fonction $f_{(k\pi)/n}$ étant continue sur $\mathbb{R}$, la fonction S_n est continue sur $\mathbb{R}$.

a. On a pour tout réel x différent de 1 et de -1 et tout entier naturel n non nul :

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(x^2 - 2x \ \cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) &&= \ln\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2 - 2x \ \cos\frac{k\pi}{n} + 1\right) \\ &= \ln \ \frac{P(x)}{x^2 - 1} &&= \ln \ \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} \end{aligned}$$

Lorsque le réel x est différent de 1 et de -1, $\dfrac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}$ est la somme des n premiers termes de la suite géométrique de raison x^2 et de premier terme 1 c'est à dire

$$\frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-1)}.$$

Pour établir cette dernière relation, on peut aussi faire la division euclidienne du polynôme $x^{2n} - 1$ par le polynôme $x^2 - 1$.

De là on déduit que $S_n(x) = \ln\dfrac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1} = \ln(1 + x^2 + \cdots + x^{2(n-1)}) = \ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} x^{2k}\right)$ puis

$$\lim_{x \mapsto 1} S_n(x) = \lim_{x \mapsto -1} S_n(x) = \ln\sum_{k=0}^{n-1} 1 = \ln n$$

et puisque la fonction S_n est continue aux points 1 et -1, $S_n(1) = S_n(-1) = \ln \ n$

3. x étant un réel fixé différent de 1 et de -1, on considère la fonction g_x telle que

$$\forall t \in [0, \pi],\ g_x(t) = \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)$$

a. Pour qu'un élément t de $[0,\ \pi]$ appartienne à l'ensemble de définition de g_x il faut et il suffit que $x^2 - 2x\cos t + 1$ soit strictement positif.
Or $x^2 - 2x\cos t + 1 = (x - \cos t)^2 - \cos^2 t + 1 = (x - \cos t)^2 + \sin^2 t$ est strictement positif si $t \in]0, \pi[$; et si $t = 0$ ou π, cette expression vaut $(x-1)^2$ ou $(x+1)^2$ et elle est encore strictement positive.
Donc $D_{g_x} = [0,\ \pi]$.
L'application $t \mapsto x^2 - 2x\cos t + 1$ étant continue, g_x est continue sur $[0,\ \pi]$ donc intégrable.

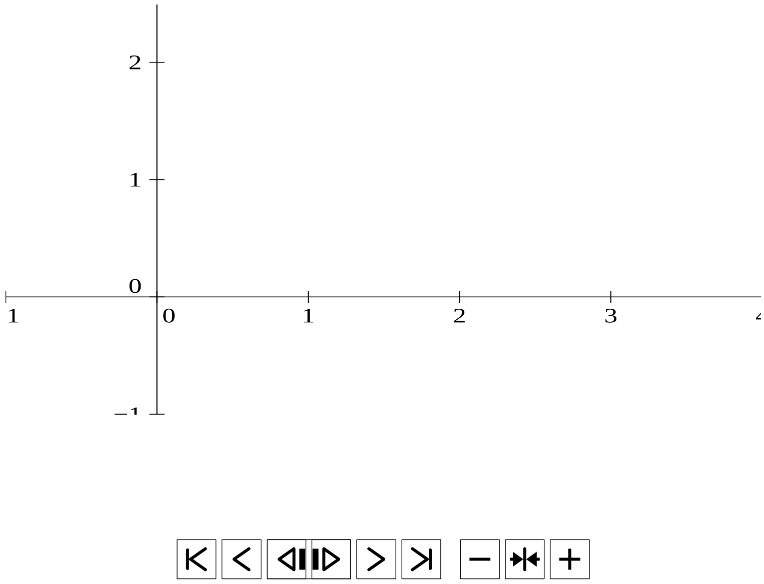

FIGURE 5. *Non demandé :* graphe de g_x avec $x = -2,\ -0,5,\ 2$ ou $0,5$

4. a.
$\dfrac{\pi}{n}S_n(x) = \dfrac{\pi}{n}\ \ln\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}$.
Si $|x| < 1$, on a $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} x^{2n} = 0$; donc $\dfrac{\pi}{n}S_n(x)$, produit des deux facteurs $\dfrac{\pi}{n}$ et $\ln\dfrac{x^{2n}-1}{x^2-1}$ ayant pour limites respectives 0 et $\ln\dfrac{-1}{x^2-1}$ lorsque n tend vers $+\infty$, a pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$.
b. Si $|x| > 1$, on se ramène au cas précédent en posant $y = 1/x$.
Alors $|y| < 1$ et on a :

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{n}S_n(x) &= \frac{\pi}{n}\ \ln\frac{x^{2n}(1-y^{2n})}{x^2(1-y^2)}\\ &= \frac{2(n-1)\pi}{n}\ \ln|x| + \frac{\pi}{n}\ \ln\frac{1-y^{2n}}{1-y^2}\end{aligned}$$

Comme $\dfrac{\pi}{n}\ \ln\dfrac{1-y^{2n}}{1-y^2}$ a pour limite 0 lorsque n tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{n\mapsto+\infty}\dfrac{\pi}{n}S_n(x) = 2\pi\ln|x|$.

5. a. Pour tout réel x différent de 1 et de -1, la fonction g_x est dérivable sur $[0,\ \pi]$ et

$$\forall t \in [0,\ \pi],\ g'_x(t) = \frac{2x\sin t}{x^2 - 2x\cos t + 1}$$

x est positif, le dénominateur de cette fraction est > 0 et $\sin t \geq 0$, donc, $g'_x(t)$ positif. La fonction g_x est donc croissante.

Pour tout entier naturel non nul n, subdivisons l'intervalle $[0,\, \pi]$ en n intervalles $[k\pi/n, (k+1)\pi/n], k \in [\![0, n-1]\!]$ (intervalle de $\mathbb{N}$)

Alors pour tout k dans $[\![0, n-1]\!]$ et tout t tel que $\dfrac{k\pi}{n} \leq t \leq \dfrac{(k+1)\pi}{n}$ on a, puisque g_x est croissante :

$$g_x\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \leq g_x(t) \leq g_x\Big(\frac{(k+1)\pi}{n}\Big)$$

puis par intégration :

$$\int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} g_x\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)\, dt \leq \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} g_x(t)\, dt \leq \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} g_x\Big(\frac{(k+1)\pi}{n}\Big)\, dt.$$

i.e

$$\frac{\pi}{n} g_x\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \leq \int_{k\pi/n}^{(k+1)\pi/n} g_x(t)\, dt \leq \frac{\pi}{n} g_x\Big(\frac{(k+1)\pi}{n}\Big).$$

Ensuite en sommant de $k = 0$ à $n - 1$:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} g_x\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{k/n}^{(k+1)/n} g_x(t)\, dt \leq \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\pi}{n} g_x\Big(\frac{(k+1)\pi}{n}\Big).$$

i.e :

$$\frac{\pi}{n} S_n(x) + \frac{\pi}{n} g_x(0) \leq \int_0^{\pi} g_x(t)\, dt \leq \frac{\pi}{n} S_n(x) + \frac{\pi}{n} g_x(\pi).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ dans la relation précédente, on obtient par application du théorème des gendarmes :

$$\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\pi}{n} S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2\pi \ln x & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

N.B : En fait on a : $\displaystyle\int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x\cos t + 1)\, dt = \lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\pi}{n} S_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| < 1 \\ 2\pi \ln |x| & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$