UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 G 18 Bis AR
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Exercice 1 (4 *points*).

1. a. $p(A_1) = \dfrac{10 \times C_2^2}{C_{20}^2} = \dfrac{1}{19}$ et $p(A_2/A_1) = \dfrac{9 \times C_2^2}{C_{18}^2} = \dfrac{1}{17}$.

b. Cette probabilité est $p(A_1 \cap A_2) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) = \dfrac{1}{19}\dfrac{1}{17} = \dfrac{1}{323}$.

2. $p(A_2/\overline{A_1}) = \dfrac{8 \times C_2^2}{C_{18}^2} = \dfrac{8}{153}$.

$p(A_2) = p(A_1) \times p(A_2/A_1) + p(\overline{A_1}) \times p(A_2/\overline{A_1}) = \dfrac{1}{19}\dfrac{1}{17} + \left(1 - \dfrac{1}{19}\right)\dfrac{8}{153} = \dfrac{17}{323} = \dfrac{1}{19}$.

3. Calculer $p(A_1 \cup A_2) = p(A_1) + p(A_2) - p(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{19} + \dfrac{1}{19} - \dfrac{1}{323} = \dfrac{33}{323}$.

4. a. La variable X prend les valeurs $0, 1$ ou 2.

$p(X = 0) = p\left(\overline{A_1} \cap \overline{A_2}\right) = p(\overline{A_1 \cup A_2}) = 1 - p(A_1 \cup A_2) = 1 - \dfrac{33}{323} = \dfrac{290}{323}$

$p(X = 1) = p\left((\overline{A_1} \cap A_2) \cup (A_1 \cap \overline{A_2})\right) = p((\overline{A_1} \cap A_2)) + p(A_1 \cap \overline{A_2})) = \dfrac{32}{323}$

$p(X = 2) = p(A_1 \cap A_2) = \dfrac{1}{323}$

b. L'espérance mathématique est

$$E(X) = 0 \times p(X = 0) + 1 \times p(X = 1) + 2 \times p(X = 2) = \frac{32}{323} + 2\frac{1}{323} = \frac{34}{323}.$$

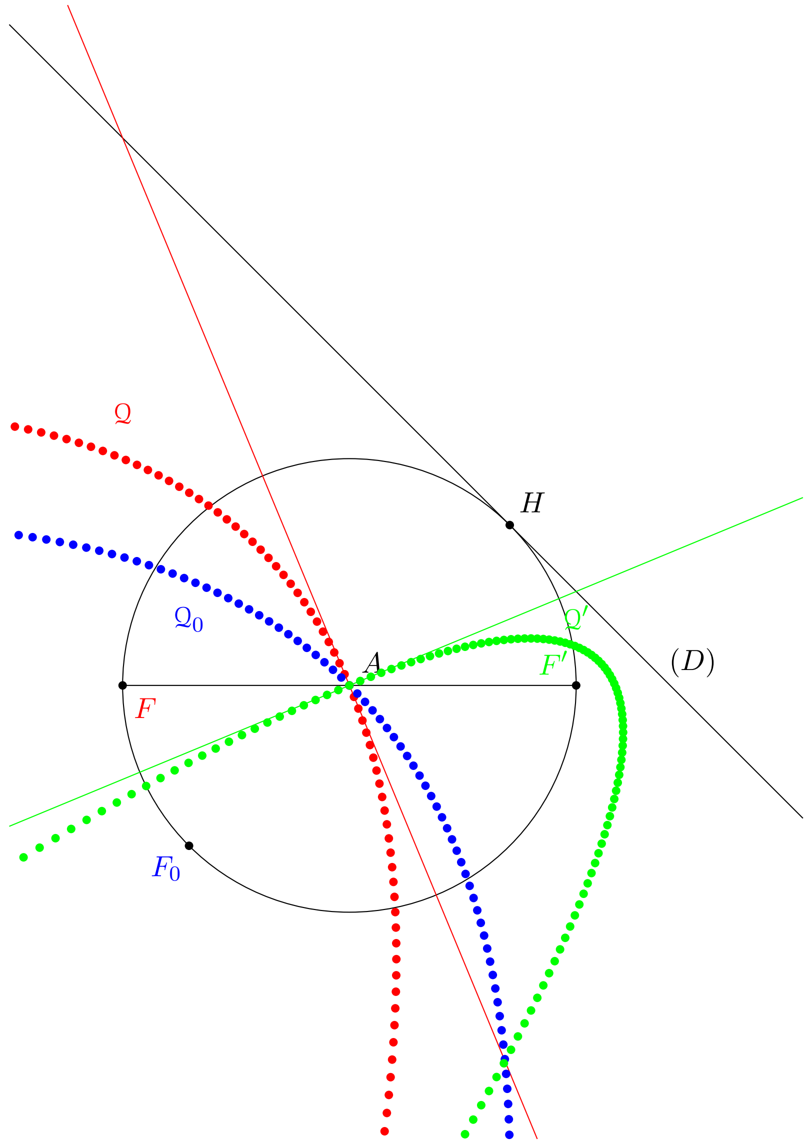
5. Notons C_1 l'événement « Le premier candidat choisit une seule des chansons difficiles. »
Notons C_2 l'événement « Le deuxième candidat choisit une seule des chansons difficiles. »
la probabilité demandée est $p(C_1 \cap C_2) = p(C_1) \times p(C_2/C_1)$.

$p(C_1) = \dfrac{C_2^1 \times C_{18}^1}{C_{20}^2} = \dfrac{18}{95}$.

$p(C_2/C_1) = \dfrac{C_{17}^1}{C_{18}^2} = \dfrac{17}{153} = \dfrac{1}{9}$.

$p(C_1 \cap C_2) = \dfrac{18}{95} \times \dfrac{1}{9} = \dfrac{2}{95}$.

Exercice 2.



1. a. Puisque F n'appartient pas à $(\mathcal{D})$, il existe une et seule parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$. Comme $(\mathcal{D})$ est tangente à $\mathcal{C}$ en H la distance de A à $(\mathcal{D})$ est égale au rayon du cercle c'est à dire à AF ;le relation $d(A,\mathcal{D}) = AF$ est caractéristique de l'appartenance de A à la parabole.

b. Les points F_0, A et H sont alignés et deux à deux distincts ; de plus $AF_0 = AH$. Donc F_0 est le point diamétralement opposé à H.

2. a. Puisque H appartient à $\mathcal{C}$, F et F' sont diamétralement opposés, le triangle $FF'H$ est rectangle en H.

Or les tangentes en A à ces deux paraboles sont les médiatrices respectives des segments $[FH]$ et $[F'H]$, donc ces deux tangentes sont bien perpendiculaires.

b. Si ces deux tangentes sont perpendiculaires en A, puisqu'elles sont les médiatrices respectives des segments $[FH]$ et $[F'H]$, le triangle $FF'H$ est rectangle en H, donc F et F' sont diamétralement opposés.

La réciproque est donc vraie.

3. a. Soit $(\mathcal{D}')$ l'image de $(\mathcal{D})$ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AH}$, B' le projeté orthogonal de B sur $(\mathcal{D})$ et $B'' = t_{\overrightarrow{AH}}(B')$.

Alors $d(B,A) = d(B,F) + d(F,A) = d(B,B') + d(H,A) = d(B,B') + d(B',B'') = d(B,B'') = d(B,(\mathcal{D}'))$.

Donc B appartient à la parabole de foyer A et de directrice $(\mathcal{D}')$.

b. $(\mathcal{E})$ est la parabole de foyer A et de directrice $(\mathcal{D}')$, $(\mathcal{P})$ est la parabole de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$.

Soit I le point d'intersection de la médiatrice de $[B'F]$ et de la droite $(\mathcal{D})$.

Les triangle BFB' et BAB'' sont isocèles de sommet principal B, donc les segments $[FB']$ et $[AB'']$ ont la même médiatrice. Cette médiatrice est donc la tangente commune en B aux deux paraboles

PROBLEME.

Partie A

1. La fonction u est continue et dérivable sur $\mathbb{R}_-^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_-^*, u'(x) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x+1}{x^2}.$

Elle s'annule au point -1 et est > 0 si et seulement si $x \in]-1, 0[$. la fonction u est donc croissante dans l'intervalle $]-1, 0[$ et décroissante dans l'intervalle $]-\infty, -1[$.

2. a. Dans $\mathbb{R}_-^*$, f est identique à u. Elle a donc même variation que u.

Dans $\mathbb{R}_+^*$, f est la composée de u avec l'application continue et dérivable $v\ : x \mapsto -\dfrac{1}{x}$ et de dérivée $v'\ : x \mapsto \dfrac{1}{x^2}$ identique à u.

f dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = u'(v(x))v'(x) = \dfrac{v(x)+1}{v^3(x)}\dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x-1}{x}.$

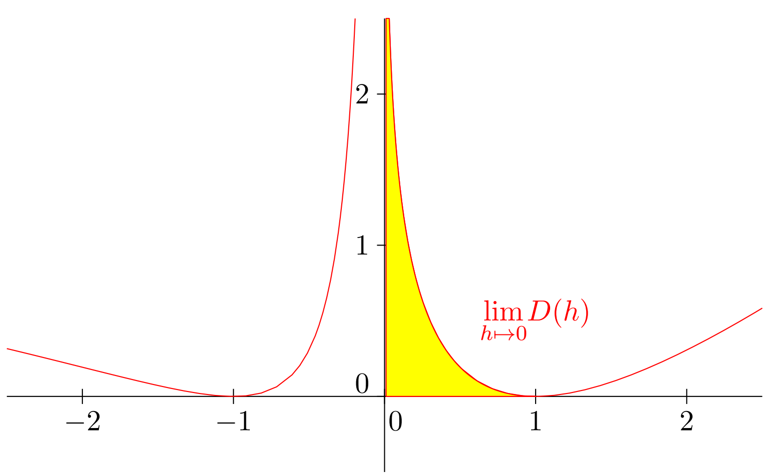
On peut aussi chercher l'expression de f en fonction de x lorsque $x > 0$ puis dériver.
$f(x) = u\left(-\dfrac{1}{x}\right) = x - 1 - \ln x$ et $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}.$

f' s'annule au point 1 et dans $\mathbb{R}_+^*$ elle est > 0 si et seulement si $x \in]1, +\infty[$. la fonction f est donc croissante dans l'intervalle $]1, +\infty[$ et décroissante dans l'intervalle $]0, 1[$.

b.

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$ ‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Voici le graphe de f



3. a. $A(h)=\displaystyle\int_h^1 f(x)dx=\int_h^1 (x-1-\ln x)dx$. Comme $x\mapsto x\ln x - x$ est une primitive de $x\mapsto \ln x$, $A(h)=\left[\dfrac{x^2}{2}-x\ln x\right]_h^1=-\dfrac{h^2}{2}+h\ln h+\dfrac{1}{2}$

b. Quand h tend vers $0, h\ln h$ tend aussi vers 0. Donc $\displaystyle\lim_{h\mapsto 0}A(h)=\frac{1}{2}$

c. D'après le tableau de variations, dans $\mathbb{R}_+^*$, f admet au point 1 un minimum global égal à 0 ; donc $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, f(x)\geq 0$ c'est à dire $\ln x\leq x-1$

Partie B

Partie C

1. a. Pour tout réel $x>0, m(x)\geq\sqrt{x}$ car ces deux nombres sont respectivement la moyenne arithmétique et géométrique de réels $\dfrac{2x}{1+x}$ et $\dfrac{1+x}{2}$.

Il y a égalité si et seulement si $\dfrac{2x}{1+x}=\dfrac{1+x}{2}$, c'est à dire si et seulement si $x=1$.

b. g est au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ car $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, g(x)=\dfrac{1}{4}(x+1)+\dfrac{x}{1+x}-\sqrt{x}$ et les fonctions $x\mapsto x+1\mapsto\dfrac{x}{1+x}$ et $\mapsto\sqrt{x}$ sont au moins deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$

La sous-question précédente montre que g est positive et s'annule seulement au point 1. g atteint donc un minimum au point 1 ; par conséquent $g'(1)=0$.

c. $\forall x\in\mathbb{R}_+^*, g'(x)=\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{(1+x)^2}-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ et $g''(x)=-\dfrac{2}{(1+x)^3}+\dfrac{1}{4(\sqrt{x})^3}=\dfrac{(1+x)^3-8(\sqrt{x})^3}{4(\sqrt{x})^3(1+x)^3}$.

$g''(x)$ a même signe que son numérateur ; ce dernier est la différence des deux cubes $(1+x)^3$ et $(2\sqrt{x})^3$.

Le numérateur a donc même signe que la différence $(1+x)-2\sqrt{x}=(\sqrt{x}-1)^2$: il est positif.

Par conséquent la fonction g'' est positive (et s'annule seulement au point 1) ; on en déduit que g' est strictement croissante.

d. Donc si $x<1$ alors $g'(x)<g'(1)=0$ et si $x>1$ alors $g'(x)>g'(1)=0$.

Voici le tableau de variations de g.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

D'après ce tableau de variations, pour tout $x\in\left[\dfrac{1}{2},\dfrac{3}{2}\right]$, on a

$$g(x)\leq\max\left[g\left(\frac{1}{2}\right),g\left(\frac{3}{2}\right)\right]\simeq\max(0.0012,0.00025)<0.002$$

Partie D

1. En appliquant l'inégalité (E_2) avec $a_1=1,a_2=2,\ldots,a_n=n$ on obtient :
$\sqrt[n]{1.2.\ldots.n}\leq\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}$ c'est dire $\sqrt[n]{n!}\leq\dfrac{n(n+1)}{2n}=\dfrac{n+1}{2}$.

2. a. Soit n un entier ≥ 2. On a pour tout entier k dans dans l'intervalle $[1,n-1]$ et pour tout x dans $[k,k+1]$, $\dfrac{1}{k+1}\leq\dfrac{1}{x}$; puis par intégration $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{1}{k+1}dx\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$ c'est à dire $\displaystyle\frac{1}{k+1}\leq\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx$.

Ensuite par sommation

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1}\int_k^{k+1}\frac{1}{x}dx = \int_1^n \frac{1}{x}dx \text{ ou } \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x}dx.$$

On a donc bien : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{1}{x}dx.$

b. Cette relation s'écrit aussi $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq 1+\ln n$ puis $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}(1+\ln n)$. Le premier membre est la moyenne arithmétique des nombres $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. Comme la moyenne géométrique est inférieure à la moyenne arithmétique, on en déduit :

$$\sqrt[n]{1.\frac{1}{2}.\ldots.\frac{1}{n}} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leq \frac{1}{n}(1+\ln n)$$

donc $\displaystyle\sqrt[n]{n!} \geq \frac{n}{1+\ln n}$.

c. La relation $\displaystyle 0 \leq \sqrt[n]{n!} \leq \frac{n+1}{2}$ entraine $\displaystyle 0 \leq \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} \leq \frac{n+1}{2n^2}$ et comme ce dernier membre a pour limite 0, le théorème des gendarmes permet de dire que $\displaystyle\lim_{n\mapsto+\infty}\frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2} = 0$