UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

13 G 18 Bis BR
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 2ème groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Exercice 1.

1. 2 a pour module 2 et la mesure principale de son argument est 0, donc $f(2) = 2$.

-2 a pour module 2 et la mesure principale de son argument est π, donc $f(-2) = 2 + i\pi$.

$e^{3i\pi}$ a pour module 1 et la mesure principale de son argument est π, donc $f(e^{3i\pi}) = 1 + i\pi$.

$z = 2e^{3i\pi/4}$ a pour module 2 et la mesure principale de son argument est $3\pi/4$, donc $f(z) = 2 + 3i\pi/4$ et $2f(z) = 4 + 3i\pi/2$.

$z^2 = 4e^{3i\pi/2}$ a pour module 4 et la mesure principale de son argument est $-\pi/2$, donc $f(z^2) = 4 - i\pi/2$.

2. a. $f(z) = r_z + i\theta_z$ est réel pur ssi $\theta_z = 0$ c'est à dire z est un réel strictement positif.

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit réel pur est la demi droite $x\overrightarrow{u}, x > 0$ (Le plan étant rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$).

b. $f(z) = r_z + i\theta_z$ est imaginaire pur ssi $r_z = 0$; ce qui est impossible puisque $r_z > 0$. L'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit imaginaire pur est vide.

c. Notons α la mesure principale de l'argument de z^2 ; alors

$$f(z^2) = 2f(z) \Leftrightarrow |z^2| + i\alpha = 2|z| + 2i\theta_z.$$

On doit donc avoir $|z| = 2$ et $\alpha = 2\theta_z$.

Mais la condition $-\pi < \alpha \leq \pi$ se traduit par $-\pi/2 < \theta_z \leq \pi/2$.

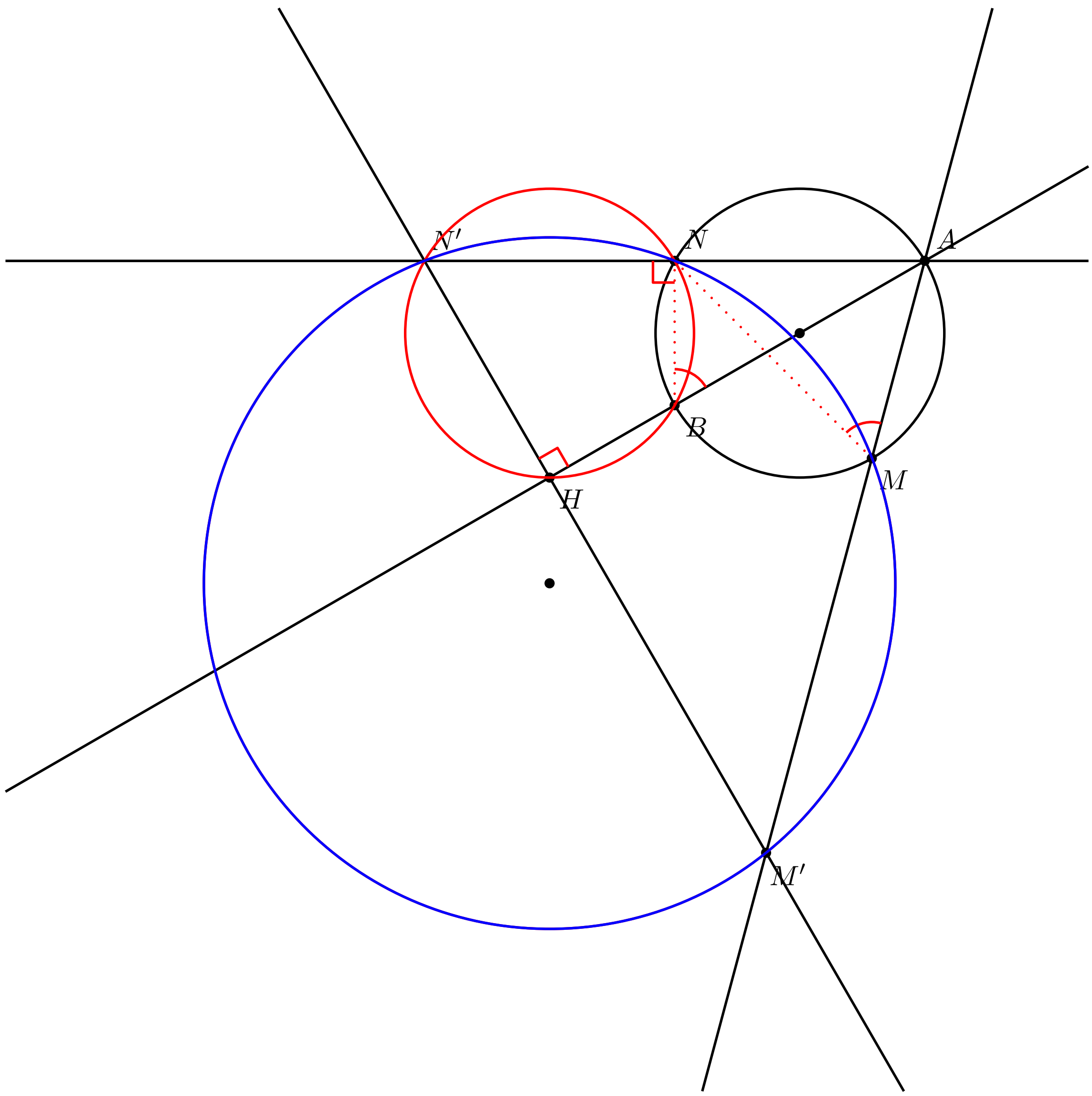
Réciproquement, si z est tel que $|z| = 2$ et $-\pi/2 < \theta_z \leq \pi/2$ alors $-\pi < 2\theta_z \leq \pi$, donc $2\theta_z$ est la mesure principale de l'argument de z^2 et

$$f(z^2) = |z^2| + 2\theta_z = 4 + 2\theta_z = 2(2 + \theta_z) = 2(|z| + \theta_z) = 2f(z)$$

L'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z^2) = 2f(z)$ est l'ensemble des points M dont l'affixe z est de module 2 et la mesure principale de l'argument appartient à $]-\pi/2, \pi/2]$; c'est le demi cercle de centre O de rayon 2 contenu dans le demi plan des points d'abscisse $x \geq 0$ privé du point de coordonnées $(0, -2)$;

Exercice 2.

1.



2. $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN})\,[\pi]$ car les points A, B, M et N appartiennent au même cercle $\mathcal{C}$.

3. Le triangle ABN est rectangle en N car $[AB]$ est diamètre ; donc $(\overrightarrow{NN'}, \overrightarrow{NB}) = (\overrightarrow{HN'}, \overrightarrow{HB})\,[\pi]$ et les points H, B, N et N' sont cocycliques.

On a :
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{N'N}) &= (\overrightarrow{N'H}, \overrightarrow{N'N})\,[\pi] && \text{car } H \text{ appartient à la droite}(N'M')\\ &= (\overrightarrow{BH}, \overrightarrow{BN})\,[\pi] && \text{car } H, B, N \text{ et } N' \text{ sont cocycliques}\\ &= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BN})\,[\pi] && \text{car } A \text{ appartient à la droite}(BH)\\ &= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})\,[\pi] && \text{d'après la question 2}\end{aligned}$$

4. On en déduit
$$\begin{aligned}(\overrightarrow{N'M'}, \overrightarrow{N'N}) &= (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MN})\,[\pi]\\ &= (\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{MN})\,[\pi] && \text{car } M' \text{ appartient à la droite}(MA)\end{aligned}$$

Cette dernière relation montre bien que M, N, M' et N' sont cocycliques.

Exercice 3 ($5\,points$)**.**

Le couple $(u_0, v_0) = (1, 175)$ est bien une solution de $-25u + 19v = 3300$ car

$-25 \times 1 + 19 \times 175 = 3300.$

1. On a $-25u_0 + 19v_0 = 3300$ et un couple (u, v) est solution de (E) ssi $-25u + 19v = 3300$. En faisant la différence on trouve $-25(u - u_0) + 19(v - v_0) = 0$ c'est à dire
$25(u - u_0) = 19(v - v_0) \quad (*)$.
Donc 25 divise $19(v - v_0)$ et comme il est premier avec 19, il doit diviser $v - v_0$ d'après le théorème de Gauss; il existe donc un entier k tel que $v - v_0 = 25k$, soit $v = 25k + v_0$ et la relation $(*)$ entraîne que $u = 19k + u_0$. L'ensemble des solutions de l'équation (E) est donc $\{(19k + 1, 25k + 175)\,; k \in \mathbb{Z}\}$

2. a. Le nombre m de mangues est un entier strictement compris entre 0 et 38 et de plus, puisqu'il y a plus de mangues que d'oranges, $m > 38 - m$;
donc a bien $19 < m < 38$.
b.
Soit x le prix d'une mangue. La dépense totale $mx + (38 - m)(x + 50)$ doit être égale à 8500 c'est à dire $-25m + 19x = 3300$.
D'après les questions précédentes, il existe un entier k tel que

$$m = 19k + 1 \text{ et } x = 25k + 175.$$

La relation $19 < m < 38$ signifie alors $19 \leq 19k + 1 \leq 38$ c'est à dire $18/19 \leq k \leq 37/19$; par conséquent $k = 1, m = 20, x = 200$, le nombre d'oranges est $38 - m = 18$ et le prix d'une orange est $200 + 50 = 250$.

Exercice 4.

1. a.
Les fonctions x et y sont définies sur $\mathbb{R}$ et
$\forall t \in \mathbb{R}, -t \in \mathbb{R}$ et $x(-t) = -x(t), y(-t) = y(t)$
par conséquent, les points $M(-t)$ et $M(t)$ sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.
La courbe $\mathcal{C}$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
b. Les fonctions x et y sont dérivables sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall t \in \mathbb{R}, x'(t) = 3t^2 + \frac{1}{2}, y'(t) = t$$

Les dérivées étant positives sur $\mathbb{R}_+$, voici le tableau de variations conjoint de x et y.

t	0	$+\infty$
$x'(t)$	$\frac{1}{2}$ $+$	
$y'(t)$	0 $+$	
$x(t)$	0 $\nearrow$	$+\infty$
$y(t)$	$\frac{1}{4}$ $\nearrow$	$+\infty$

Non demandé : Comme $\lim\limits_{t \mapsto +\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = \lim\limits_{t \mapsto +\infty} \dfrac{2t^2 + 1}{4t^3 + t} = 0$ et $\lim\limits_{t \mapsto -\infty} \dfrac{y(t)}{x(t)} = 0$, $\mathcal{C}$ a deux branches infinies de direction l'axe des abscisses.
Voici en bleu la courbe $\mathcal{C}$.

2. a. En posant $f(x) = x^2$, on voit que
la tangente (T_m) a pour vecteur directeur le vecteur $\overrightarrow{u}$ de coordonnées $(1, f'(m)) = (1, 2m)$.

Un point $M(x, y)$ appartient à (D_m) ssi $\overrightarrow{M_m M}.\overrightarrow{u} = 0$ c'est à dire $(x - m).1 + (y - m^2).2m = 0$.
Par conséquent (D_m) a bien équation cartésienne : $x + 2my - 2m^3 - m = 0$
Le point A_m ayant 0 pour ordonnée, son abscisse est solution de l'équation d'inconnue x : $x - 2m^3 - m = 0$ donc A_m a pour coordonnées$(2m^3 + m, 0)$.
Le point B_m ayant 0 pour abscisse, son ordonnée est solution de l'équation d'inconnue y : $2my - 2m^3 - m = 0$ donc B_m a pour coordonnées $(0, m^2 + \frac{1}{2})$.

On en déduit que I_m a pour coordonnées $(m^3 + \frac{1}{2}m, \frac{1}{2}m^2 + \frac{1}{4})$.

I_m est alors le point de la courbe $\mathcal{C}$ de paramètre m et
l'ensemble des points I_m lorsque m parcourt $\mathbb{R}^*$ est la courbe $\mathcal{C}$ privé du point de coordonnées $(0, \frac{1}{4})$ correspondant au paramètre 0.

b. La figure a été complétée.