UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

16 G 18 Bis B01
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du $2^{\text{ème}}$ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRECTION

Exercice 1.

1. $C_5^3 = 10, C_6^2 = 15$ et $C_{10}^4 = 210$.
La proposition est fausse, car par exemple $C_6^2 = 15$ n'est pas un multiple de 6.

2. De la relation $C_n^p = \dfrac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$ on tire : $pC_n^p = nC_{n-1}^{p-1}$.
On y voit que n divise pC_n^p ; donc s'il est premier avec p, il doit d'après Gauss, diviser C_n^p. C_n^p est donc multiple de n.
La réciproque est fausse, car par exemple, $C_{10}^4 = 210$ est un multiple de 10 et pourtant 10 et 4 ne sont pas premiers entre eux.

3. n étant premier, est premier avec tout entier p compris entre 1 et $n-1$, par conséquent, C_n^p est un multiple de n d'après la question précédente.
Pour tout couple d'entiers (a, b) la formule du binôme entraîne

$$(a+b)^n - (a^n + b^n) = \sum_{p=1}^{n-1} C_n^p a^{n-p} b^p$$

c'est donc un multiple de n puisque somme de multiples de n.

Exercice 2.

1. a. Si x est un réel $\neq k\dfrac{\pi}{2}$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, alors $\tan x$ et $\tan 2x$ existent et sont non nuls.

$$\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{2\cos 2x}{\sin 2x} = \frac{\cos x}{\sin x} - \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

b.

$$\begin{aligned}
f_n(x) &= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} \tan \frac{x}{2^p} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p} \left(\frac{1}{\tan\theta} - \frac{2}{\tan 2\theta} \right) \text{ d'après la question précédente, avec } \theta = \frac{x}{2^p} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \frac{1}{2^p \tan(x/2^p)} - \frac{1}{2^{p-1}\tan(x/2^{p-1})} \\
&= \sum_{p=0}^{n} \alpha_{p+1} - \alpha_p \text{ avec } \alpha(p) = \frac{1}{2^{p-1}\tan(x/2^{p-1})} \\
&= \alpha_{n+1} - \alpha_0 \\
f_n(x) &= \frac{1}{2^n \tan(x/2^n)} - \frac{2}{\tan 2x}
\end{aligned}$$

Mais aussi $f_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\cos(x/2^n)}{\sin(t/2^n)} - 2\dfrac{\cos(2x)}{\sin(2tx)}$

2.

a.

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} f_n(t)\ dt = \int_{\pi/6}^{\pi/3} \Big(\frac{1}{2^n}\frac{\cos(t/2^n)}{\sin(t/2^n)} - 2\frac{\cos(2t)}{\sin(2t)}\Big) dt \\
&= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \Big(\frac{u'}{u} - \frac{v'}{v}\Big)\ dt \text{ avec } u = \sin(t/2^n) \text{ et } v = \sin 2t \\
&= \Big[\ln|u| - \ln|v|\Big]_{t_0}^{2t_0} \text{ avec } t_0 = \pi/6 \\
&= \ln\sin(2t_0/2^n) - \ln\sin(t_0/2^n) - \ln\sin 4t_0 + \ln\sin 2t_0 \\
&= \ln\Big(2\cos(t_0/2^n)\Big) + 0 \\
I_n &= \ln\Big(2\cos\frac{\pi}{6\times 2^n}\Big)
\end{aligned}$$

b. Quand n tend vers vers $+\infty$, $\dfrac{\pi}{6\times 2^n}$ tend vers 0 donc son cosinus tend vers 1 et $\lim\limits_{n\mapsto+\infty} I_n = \ln 2$.

Exercice 3.

Dans le repère donné, la conique C a pour équation : $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$.

1. Pour tout point M de coordonnées (x, y) du plan,

$M \in C \Leftrightarrow 9(x-1)^2 - 4(y+1)^2 = 36 \Leftrightarrow \dfrac{(x-1)^2}{4} - \dfrac{(y+1)^2}{9} = 1$

C est donc une hyperbole de centre le point Ω de coordonnées $(1, -1)$.

2. C a pour équation $\dfrac{(x-1)^2}{a^2} - \dfrac{(y+1)^2}{b^2} = 1$ avec $a = 2$ et $b = 3$.

Dans le repère $R' = (\Omega, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}), C$ a pour équation $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$.

Dans R', ses sommets S_1 et S_2 ont pour coordonnée $(-a, 0)$ et $(a, 0)$; ses foyers F_1 et F_2 ont pour coordonnées respectives $(c, 0)$ et $(-c, 0)$ avec $c = \sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{13}$, son excentricité est $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$.

Ses axes sont la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\overrightarrow{i}$ (axe focal) et la droite passant par Ω et de vecteur directeur $\overrightarrow{j}$.

Ses directrices ont pour équations respectives dans R' :

$$x = -\frac{a^2}{c} = -\frac{4\sqrt{13}}{13} \text{ et } x = \frac{a^2}{c} = \frac{4\sqrt{13}}{13}.$$

Ses asymptotes ont pour équations respectives dans R' :

$$y = -\frac{b}{a}x = -\frac{3}{2}x \text{ et } y = \frac{b}{a}x = \frac{3}{2}x.$$

3. Tracer de C voir figure 1.

Exercice 4.

1. Puisque Δ est la médiatrice de $[OO'], S_\Delta(O') = O$; donc $f \circ S_\Delta(O') = f(O) = O'$.

Puisque f conserve les distance $AO = AO'$, donc A appartient à Δ c'est à dire $S_\Delta(A) = A$; alors $f \circ S_\Delta(A) = f(A) = A$.

2. Si $f \circ S_\Delta$ était l'application identique du plan, on en déduirait que $f = S_\Delta^{-1} = S_\Delta$; tous les points de Δ seraient invariants par f, ce qui est impossible puisque A est l'unique point invariant de f.

3. a. $f \circ S_\Delta$ est une isométrie distincte de l'application identique du plan et qui conserve les deux points A et O' ; c'est donc la réflexion d'axe $\Delta' = (AO')$

b. De $f \circ S_\Delta = S_{\Delta'}$ on déduit $f = S_{\Delta'} \circ S_\Delta^{-1} = S_{\Delta'} \circ S_\Delta$.

f, composée de deux réflexions dont les axes sont sécants en A, est une rotation de centre A.

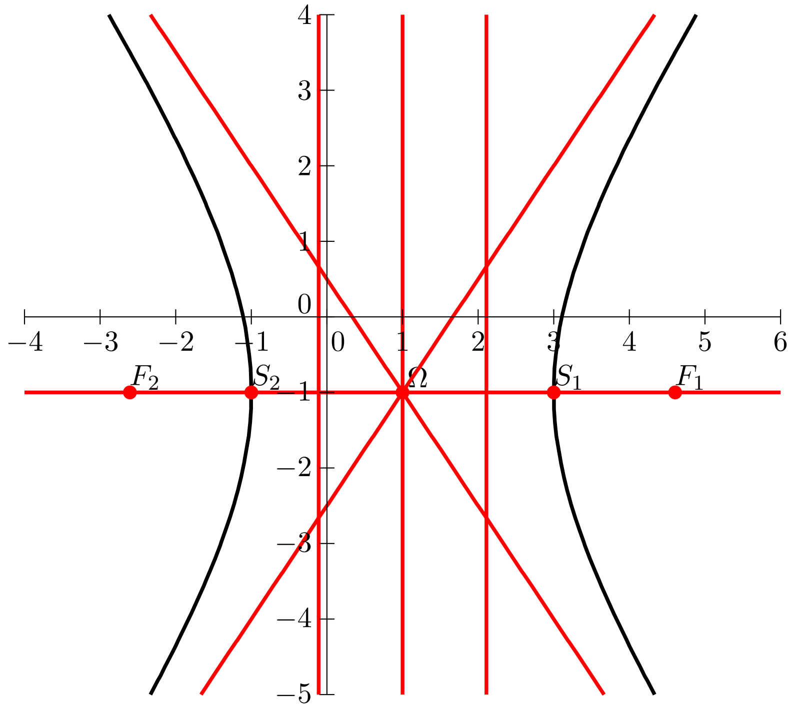

FIGURE 1. Figure de l'exercice 3