



## Exercice I (3,5pts)

1. L'évènement contraire de "A sachant B" est  $\bar{A}$  sachant B. **(0,5pt)**
2. Soient  $E$  et  $F$  deux évènements indépendants d'un même univers, on a  $p(E \cup F) = p(E) \times p(\bar{F}) + p(F)$ . **(0,5pt)**
3. Soit  $X$  une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres  $n$  et  $p$  où  $n = 4$  et  $p \in ]0, 1[$ . Si  $p(X = 1) = 8p(X = 0)$  alors  $p = \frac{2}{3}$ . **(0,75pt)**
4. Interprétations géométriques :
  - a)  $AM = 1$  **(0,25pt)**
  - b)  $AM = BM$  **(0,5pt)**
  - c)  $OM' = AB$  **(0,5pt)**
  - d)  $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A}) [2\pi]$ . **(0,5pt)**

## Exercice II (5pts)

1. Soit  $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .

a)

$$p(2+i) = (2+i)^3 + 3(2+i)^2 - 3(2+i) - 5 - 20i = 5 - 5 + 24i - 24i = 0.$$

D'où  $2 + i$  est une racine de  $p(z)$ . **(0,25pt)**

- b)  $p(2+i) = 0$  donc  $p(z) = (z-2-i)q(z)$  avec  $q(z) = z^2+(5+i)z+6+7i$ .  
 $p(z) = 0$  si et seulement si  $z-2-i = 0$  ou  $z^2+(5+i)z+6+7i = 0$ .  
On pose  $z^2 + (5+i)z + 6 + 7i = 0$ .

$$\Delta = 18i.$$

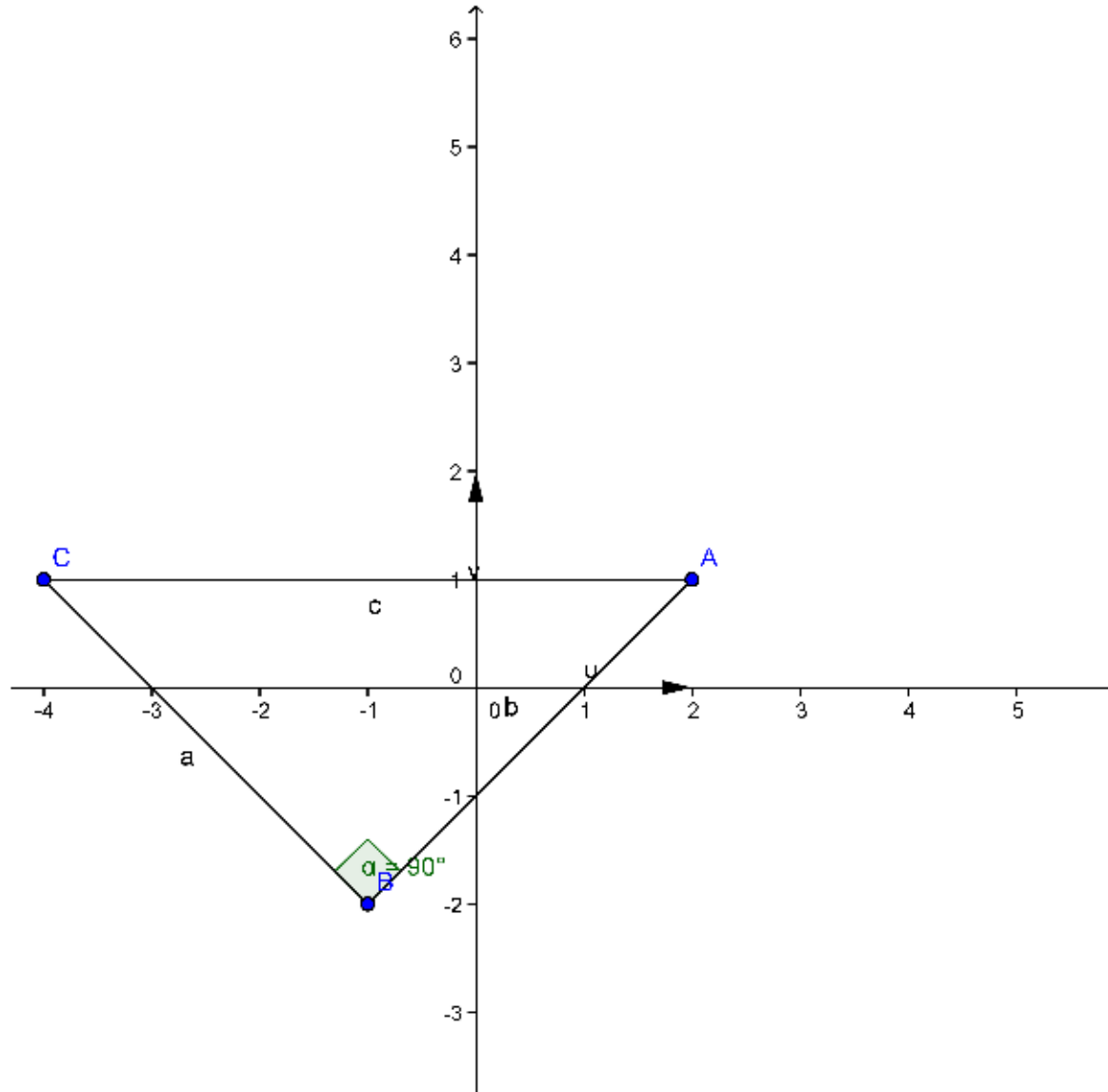
Les racines de  $\Delta$  sont  $3(1-i)$  et  $-3(1-i)$ . D'où on a :

$$z_1 = -4 + i \text{ et } z_2 = -1 - 2i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation  $p(z) = 0$  est :

$$S = \{2 + i, -4 + i, -1 - 2i\} \text{ (1pt)}$$

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .  
Soient  $A(2+i)$ ,  $B(-1-2i)$  et  $C(-4+i)$ .  
a) Plaçons les points  $A, B$  et  $C$ . **(0,25pt)**



$AB = 3\sqrt{2}$  et  $BC = 3\sqrt{2}$ . (0,25 + 0,25pt)

b) On a

$$\begin{aligned} \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) &= \arg\left(\frac{z_{\vec{BC}}}{z_{\vec{BA}}}\right) = \arg(z_{\vec{BC}}) - \arg(z_{\vec{BA}}) \\ &= (\vec{u}, \vec{BC}) - (\vec{u}, \vec{BA}) [2\pi] \end{aligned}$$

$$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) [2\pi] \text{ (0,25pt)}$$

c)

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg\left(\frac{-1 + i}{1 + i}\right) = \arg(i) = \frac{\pi}{2} [2\pi]. \text{ (0,25pt)}$$

d) D'après a) et c)  $ABC$  est un triangle rectangle isocèle en  $B$ .  
(0,25pt)

3. a)  $r : M(z) \mapsto M'(z')$  telle que  $z' = az + b$ .

$$\begin{cases} r(B) = B \\ r(A) = C \end{cases} \quad (1)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} az_B + b = z_B \\ az_A + b = z_C. \end{cases} \quad (2)$$

$$\text{D'où } a = \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-1 + i}{1 + i} = i \text{ et}$$

$$b = z_B(1 - a) = (-1 - 2i)(1 - i) = -3 - i.$$

Donc l'application  $f$  associée à  $r$  est définie par

$$f(z) = iz - 3 - i. \text{ (0,5pt)}$$

b) Les éléments caractéristiques de  $r$  sont :

– Le centre  $B$  d'affixe  $-1 - 2i$ .

– L'angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . (0,25pt)

4.  $T : M(z) \mapsto M'(z')$  telle que  $z' = i\alpha^2 z + \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

a) Si  $T$  est une homothétie de rapport 2 alors  $i\alpha^2 = 2$ .

$$i\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = -2i \Leftrightarrow \alpha = (1 - i)^2.$$

$$\text{D'où } \alpha = 1 - i \text{ ou } \alpha = -1 + i. \text{ (0,5pt)}$$

b) Si  $|\alpha| = 2$  et  $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$  alors  $\alpha = 1 - i$ . D'où

$$z' = 2z + 1 - i.$$

Donc  $T$  est une homothétie de centre  $\Omega$  d'affixe  $-1 + i$  et de rapport  $k = 2$ . (0,25pt)

5.  $g = roT$  avec  $\alpha = 1 - i$ .

a) Soit  $t$  l'application de  $\mathbb{C}$  dans  $\mathbb{C}$  associée à  $T$ . On a

$$h(z) = f \circ t(z) = f(2z + 1 - i) = i(2z + 1 - i) - 3 - i, \text{ d'où}$$

$$h(z) = 2iz - 2. \text{ (0,25pt)}$$

b)  $g$  est une similitude directe de :

– centre  $\Omega_0$  d'affixe  $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$ ,

– rapport  $k = 2$ ,

– angle  $\theta = \frac{\pi}{2}$ .

$$g = S(\Omega_0(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i), 2, \frac{\pi}{2}). \text{ (0,5pt)}$$

### Exercice III (2,5pts)

1. Le coefficient de corrélation linéaire  $r$  est défini par  $r = \frac{Cov(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$ .

D'où  $r \approx 0,69$ . (01pt)

2. a) La droite de regression de  $Y$  en  $X$ ,  $(D_{Y/X})$ , a pour équation

$$y = 92,59x - 4,35. \text{ (01pt)}$$

b) Il faut investir 3,29 milliards de FCFA si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards. (0,5pt)

### Exercice IV (9pts)

A) 1. Soit  $I(\alpha) = \int_0^\alpha e^t(t+2)dt$

En intégrant par parties  $\int_0^\alpha e^t(t+2)dt$ , on obtient :

$$I(\alpha) = e^\alpha(\alpha+1) - 1. \text{ (0,5pt)}$$

D'où  $I(x) = e^x(x+1) - 1$ . (0,25pt)

2.  $k$  étant une fonction dérivable sur  $\mathbb{R}$ , soit  $h$  telle que  $h(x) = k(x)e^{-x}$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

- a) Si  $h$  vérifie la condition  $h'(x) + h(x) = x + 2$  alors on a :  
 $k'(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x + 2$ , d'où

$$k'(x) = (x + 2)e^x. \quad (\mathbf{0,5pt})$$

- b) Dédisons-en  $h$ . Puisque  $k'(x) = (x + 2)e^x$ .  
D'après 1)  $I$  est une primitive de  $k'$ , donc  
 $k(x) = e^x(x + 1) - 1 + c$ , avec  $c$  une constante.  
Or  $h(0) = 2$  nous donne  $k(0) = 2$  donc  $c = 2$ . Ainsi

$$k(x) = e^x(x + 1) + 1. \quad (\mathbf{0,25pt})$$

D'où

$$h(x) = x + 1 + e^{-x}. \quad (\mathbf{0,25pt})$$

- B) I)** 1. Etude les variations de la fonction  $g$ , définie par

$$g(x) = x + 1 + e^{-x}, \text{ sur } \mathbb{R}.$$

Domaine de définition de  $g$  :

$g$  étant définie partout dans  $\mathbb{R}$ , d'où  $D_g = \mathbb{R}$ .

Continuité et dérivabilité :

- La fonction  $x \mapsto x + 1$  est une fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$
- La fonction  $x \mapsto -x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ , de même que la fonction  $x \mapsto e^x$ . Par composée, la fonction  $x \mapsto e^{-x}$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ ,
- Par somme  $g$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

Calcul de  $g'(x)$

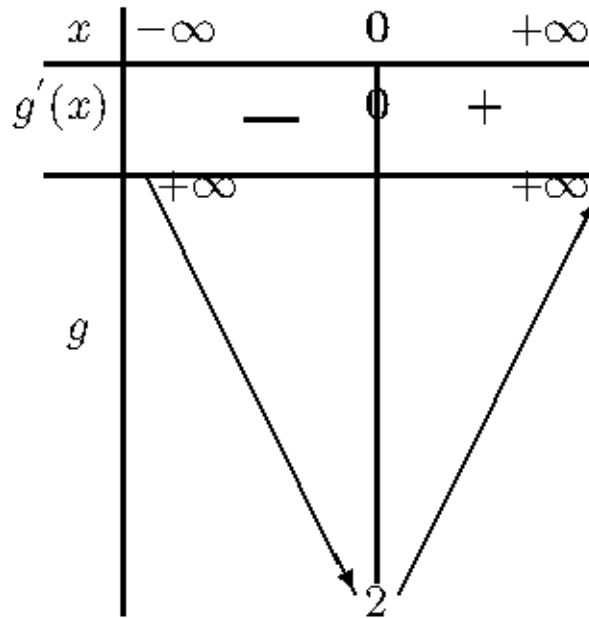
$$g'(x) = \frac{e^x - 1}{e^x}$$

D'où  $g'(x) \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$  et  $g'(x) < 0$  pour tout  $x < 0$ .

Tableau de variations de  $g$  :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{-x}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + e^{-x} = +\infty.$$



2.  $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) \geq 2$  d'après le tableau de variations de  $g$ , ce qui implique  $g$  est strictement positif.

**II)**  $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$ .

1. Les variations de la fonction  $f$  :

-  $D_f = \mathbb{R}$ .

-  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty,$

-  $f$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  par composée.

- Dérivée :

$$f'(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + 1 + e^{-x}}$$

- Sens de variations de  $f$  :

$f'(x)$  a le même signe que  $1 - e^{-x}$ .

$f'(x) \geq 0$  si  $x \geq 0,$

$f'(x) < 0$  si  $x < 0.$

- Tableau de variations de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$+$
$f$	$+\infty$	$\ln 2$	$+\infty$

2.  $M(\ln x)$ ,  $N(\ln(x+1+e^{-x}))$ .

a)  $\overline{MN} = \ln(x+1+e^{-x}) - \ln x$ .

D'une part, la fonction  $\ln$  étant croissante et  $x+1+e^{-x} > x$ , d'où  $\ln(x+1+e^{-x}) > \ln(x)$ , donc

$$\overline{MN} > 0 \quad (1).$$

D'autre part,  $\overline{MN} = \ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right)$ .

Or si  $x > 0$  alors  $e^{-x} < 1$ , d'où  $x+1+e^{-x} < x+2$ , ainsi

$\ln\left(\frac{x+1+e^{-x}}{x}\right) < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right)$ , donc

$$\overline{MN} < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) \quad (2).$$

(1) et (2) donnent :

$$0 < \overline{MN} < \ln\left(\frac{x+2}{x}\right).$$



- b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$ ,  
 donc  $0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{MN} < 0$ , d'où d'après le théorème des  
 gendarmes
- $$\lim_{x \rightarrow +\infty} \overline{MN} = 0.$$

3. a) Démontrons que  $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ .  
 On sait que  $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x}) = \ln\left(\frac{(x+1)e^x + 1}{e^x}\right)$ .  
 Cherchons le signe de  $m(x) = (x+1)e^x + 1$ .  
 On a  $m'(x) = (x+2)e^x$ , et elle s'annule en  $-2$ .  
 $m$  étant décroissante sur  $]-\infty; -2]$  et croissante sur  $[-2; +\infty[$   
 alors  $m$  admet un un minimum en  $-2$  et  $m(-2) = \frac{e^2 - 1}{e^2}$ .  
 Donc pour tout  $x$ ,  $m(x) > 0$ . Ainsi donc

$$f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1).$$

- b) D'après a)  $f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1)$ . Or  
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln((x+1)e^x + 1) = 0$ . Donc  $(\mathcal{C}_f)$   
 admet une asymptote oblique  $(\Delta)$ , d'équation  $y = -x$  au  
 voisinage de  $-\infty$ .  
 Position de  $(\mathcal{C}_f)$  par rapport à  $(\Delta)$  :  
 Cherchons le signe de  $\ln((x+1)e^x + 1)$ .  
 $\ln((x+1)e^x + 1) \geq 0$  si  $(x+1) \geq 0$ .  
 Alors  $(\mathcal{C}_f)$  est en dessous de  $(\Delta)$  au voisinage de  $-\infty$ .  
 Au voisinage de  $+\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$ .  
 Donc  $(\mathcal{C}_f)$  admet une branche infinie de direction l'axe  
 $(Ox)$ .

