Université Cheikh Anta Diop de Dakar

Office du Baccalauréat

Premier groupe. **Corrigé de l'épreuve n° 15 G 26 02**. Année 2015

Exercice I (3,5pts)

1. L'évènement contraire de "A sachant B" est $\overline{A}$ sachant B. **(0,5pt)**

2. Soient E et F deux évèments indépendants d'un même univers, on a p$(E \cup F)$ =p$(E)\times$p$(\overline{F})$+p(F). **(0,5pt)**

3. Soit X une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramétres n et p où $n = 4$ et $p \in]0,1[$. Si p$(X = 1) = 8$p$(X = 0)$ alors $p = \frac{2}{3}$. **(0,75pt)**

4. Interprétations géométriques :

   a) $AM = 1$ **(0,25pt)**

   b) $AM = BM$ **(0,5pt)**

   c) $OM' = AB$ **(0,5pt)**

   d) $(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = (\overrightarrow{M'B}, \overrightarrow{M'A})\ [2\pi]$. **(0,5pt)**

Exercice II (5pts)

1. Soit $p(z) = z^3 + 3z^2 - 3z - 5 - 20i,\ z \in \mathbb{C}$.

   a)

$$p(2+i) = (2+i)^3+3(2+i)^2-3(2+i)-5-20i = 5-5+24i-24i = 0.$$

D'où $2 + i$ est une racine de $p(z)$. **(0,25pt)**

b) $p(2+i)=0$ donc $p(z)=(z-2-i)q(z)$ avec $q(z)=z^2+(5+i)z+6+7i$.
$p(z)=0$ si et seulement si $z-2-i=0$ ou $z^2+(5+i)z+6+7i=0$.
On pose $z^2+(5+i)z+6+7i=0$.

$$\Delta = 18i.$$

Les racines de Δ sont $3(1-i)$ et $-3(1-i)$. D'où on a :

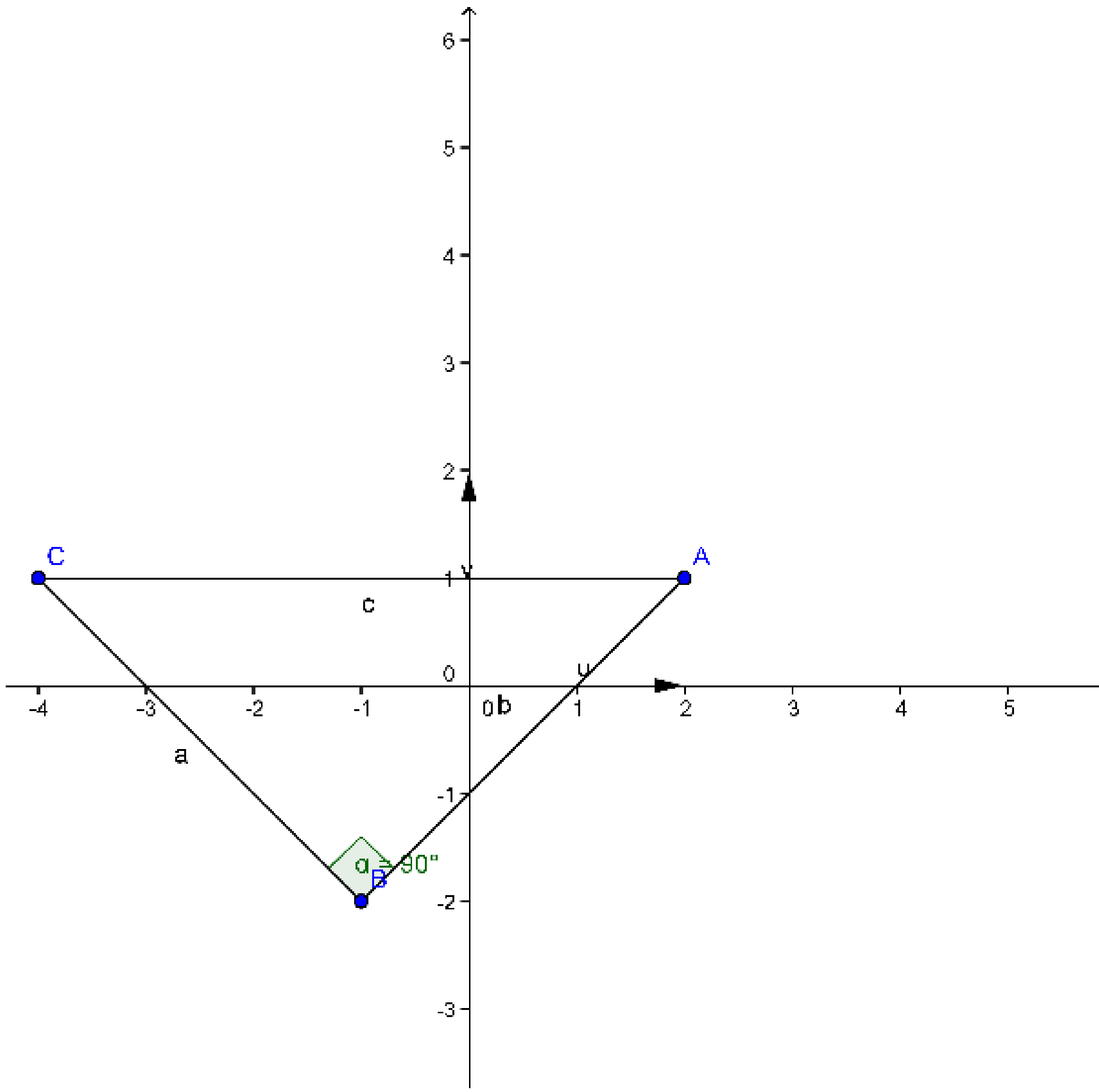
$$z_1=-4+i \text{ et } z_2=-1-2i.$$

L'ensemble des solutions de l'équation $p(z)=0$ est :

$$S=\{2+i,-4+i,-1-2i\}\ \textbf{(1pt)}$$

2. Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.
Soient $A(2+i), B(-1-2i)$ et $C(-4+i)$.

a) Plaçons les points A, B et C. **(0,25pt)**



$AB = 3\sqrt{2}$ et $BC = 3\sqrt{2}$. **(0,25+ 0,25pt)**

b) On a

$$\arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{BC}}}{z_{\overrightarrow{BA}}}\right) = \arg(z_{\overrightarrow{BC}}) - \arg(z_{\overrightarrow{BA}})$$
$$= (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BC}) - (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{BA}) \ [2\pi]$$

$$= (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC})\ [2\pi]\ \textbf{(0,25pt)}$$

c)

$$\arg(\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B}) = \arg(\frac{-1+i}{1+i}) = \arg(i) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi].\ \textbf{(0,25pt)}$$

d) D'après a) et c) ABC est un triangle rectangle isocéle en B. **(0,25pt)**

3. **a)** $r : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = az + b$.

$$\begin{cases} r(B) = B \\ r(A) = C \end{cases} \qquad (1)$$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} az_B + b = z_B \\ az_A + b = z_C. \end{cases} \qquad (2)$$

$$\text{D'où } a = \frac{z_B - z_C}{z_B - z_A} = \frac{-1+i}{1+i} = i \text{ et}$$
$$b = z_B(1-a) = (-1-2i)(1-i) = -3-i.$$

Donc l'application f associée à r est définie par

$$f(z) = iz - 3 - i.\ \textbf{(0,5pt)}$$

b) Les éléments caractéristiques de r sont :
- Le centre B d'affixe $-1-2i$.
- L'angle $\theta = \frac{\pi}{2}$. **(0,25pt)**

4. $T : M(z) \mapsto M'(z')$ telle que $z' = i\alpha^2 z + \alpha,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

a) Si T est une homothétie de rapport 2 alors $i\alpha^2 = 2$.

$$i\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha^2 = -2i \Leftrightarrow \alpha = (1-i)^2.$$
$$\text{D'où } \alpha = 1 - i \text{ ou } \alpha = -1 + i.\ \textbf{(0,5pt)}$$

b) Si $|\alpha| = 2$ et $\arg(\alpha) = -\frac{\pi}{4}$ alors $\alpha = 1 - i$. D'où

$$z' = 2z + 1 - i.$$

Donc T est une homothétie de centre Ω d'affixe $-1+i$ et de rapport $k = 2$. **(0,25pt)**

5. $g = roT$ avec $\alpha = 1 - i$.

a) Soit t l'application de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$ associée à T. On a

$$h(z) = fot(z) = f(2z + 1 - i) = i(2z + 1 - i) - 3 - i, \text{ d'où}$$

$$h(z) = 2iz - 2. \textbf{ (0,25pt)}$$

b) g est une similitude directe de :

– centre Ω_0 d'affixe $-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i$,
– rapport $k = 2$,
– angle $\theta = \frac{\pi}{2}$.

$$g = S(\Omega_0(-\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i), 2, \frac{\pi}{2}). \textbf{ (0,5pt)}$$

Exercice III (2,5pts)

1. Le coefficient de corrélation linéaire r est défini par $r = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y}$.
   D'où $r \approx 0,69$. **(01pt)**
2. **a)** La droite de regression de Y en X, $(D_{Y/X})$, a pour équation

$$y = 92,59x - 4,35. \qquad \textbf{(01pt)}$$

b) Il faut investir $3,29$ milliards de FCFA si l'on désire un chiffre d'affaire de 300 milliards. **(0,5pt)**

Exercice IV (9pts)

A) 1. Soit $I(\alpha) = \int_0^\alpha e^t(t+2)dt$
En intégrant par parties $\int_0^\alpha e^t(t+2)dt$, on obtient :

$$I(\alpha) = e^\alpha(\alpha + 1) - 1. \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

D'où $I(x) = e^x(x+1) - 1$. **(0,25pt)**

2. k étant une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$, soit h telle que $h(x) = k(x)e^{-x}, \ \forall x \in \mathbb{R}$

a) Si h vérifie la condition $h'(x) + h(x) = x + 2$ alors on a :
$k^{'}(x)e^{-x} - k(x)e^{-x} + k(x)e^{-x} = x + 2$, d'où

$$k^{'}(x) = (x + 2)e^{x}. \qquad \textbf{(0,5pt)}$$

b) Déduisons-en h. Puisque $k^{'}(x) = (x + 2)e^{x}$.
D'après 1) I est une primitive de $k^{'}$, donc
$k(x) = e^{x}(x + 1) - 1 + c$, avec c une constante.
Or $h(0) = 2$ nous donne $k(0) = 2$ donc $c = 2$. Ainsi

$$k(x) = e^{x}(x + 1) + 1. \qquad \textbf{(0,25pt)}$$

D'où

$$h(x) = x + 1 + e^{-x}. \qquad \textbf{(0,25pt)}$$

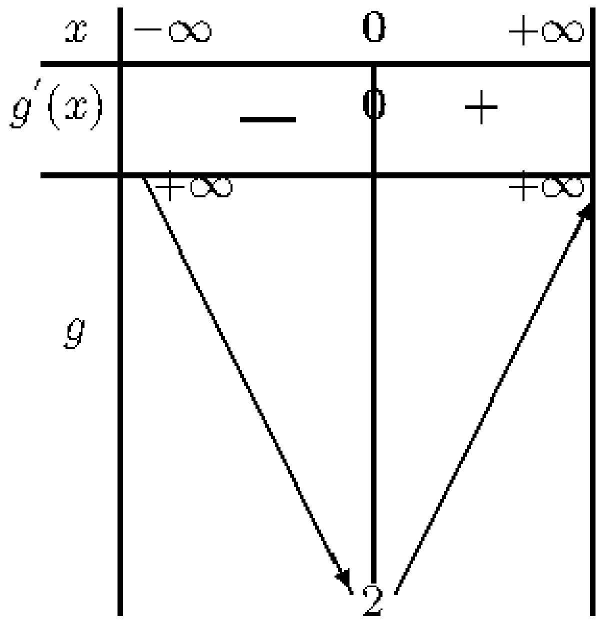
B) I) 1. Etude les variations de la fonction g, définie par
$g(x) = x + 1 + e^{-x}$, sur $\mathbb{R}$.
Domaine de définition de g :
g étant définie partout dans $\mathbb{R}$, d'où $D_g = \mathbb{R}$.
Continuité et dérivabilité :

- La fonction $x \mapsto x + 1$ est une fonction polynôme, elle est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$

- La fonction $x \mapsto -x$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, de même que la fonction $x \mapsto e^{x}$. Par composée, la fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$,

- Par somme g est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Calcul de $g^{'}(x)$
$g^{'}(x) = \dfrac{e^{x} - 1}{e^{x}}$
D'où $g^{'}(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 0$ et $g^{'}(x) < 0$ pour tout $x < 0$.
Tableau de variations de g :
$\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} x(1 + \frac{1}{x} - \frac{e^{-x}}{-x}) = +\infty$
$\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x + 1 + e^{-x} = +\infty.$



2. $\forall x \in \mathbb{R},\ \ g(x) \geq 2$ d'après le tableau de variations de g, ce qui implique g est strictement positif.

II) $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x})$.

1. <u>Les variations de la fonction f</u> :

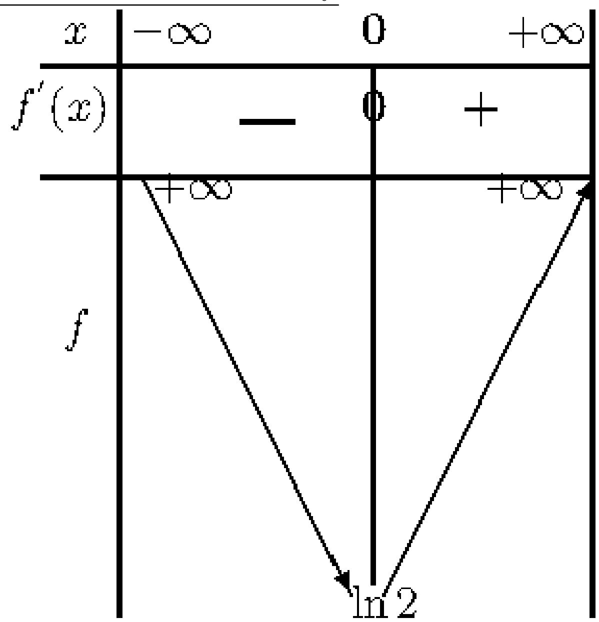
   – $D_f = \mathbb{R}$.

   – $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \ \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty,$

   – f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ par composée.

   – <u>Dérivée</u> :
   $f'(x) = \dfrac{1 - e^{-x}}{x + 1 + e^{-x}}$
   – <u>Sens de variations de f</u> :
   $f'(x)$ a le même signe que $1 - e^{-x}$.
   $f'(x) \geq 0$ si $x \geq 0$,
   $f'(x) < 0$ si $x < 0$.

– <u>Tableau de variations de f</u> :



2. $M\binom{x}{\ln x}$, $N\binom{x}{\ln(x+1+e^{-x})}$.

a) $\overline{MN} = \ln(x+1+e^{-x}) - \ln x$.
D'une part, la fonction ln étant croissante et
$x+1+e^{-x} > x$, d'où $\ln(x+1+e^{-x}) > \ln(x)$, donc

$$\overline{MN} > 0 \qquad (1).$$

D'autre part, $\overline{MN} = \ln(\dfrac{x+1+e^{-x}}{x})$.
Or si $x > 0$ alors $e^{-x} < 1$, d'où $x+1+e^{-x} < x+2$, ainsi
$\ln(\dfrac{x+1+e^{-x}}{x}) < \ln(\dfrac{x+2}{x})$, donc

$$\overline{MN} < \ln(\frac{x+2}{x}) \qquad (2).$$

(1) et (2) donnent :

$$0 < \overline{MN} < \ln(\frac{x+2}{x}).$$

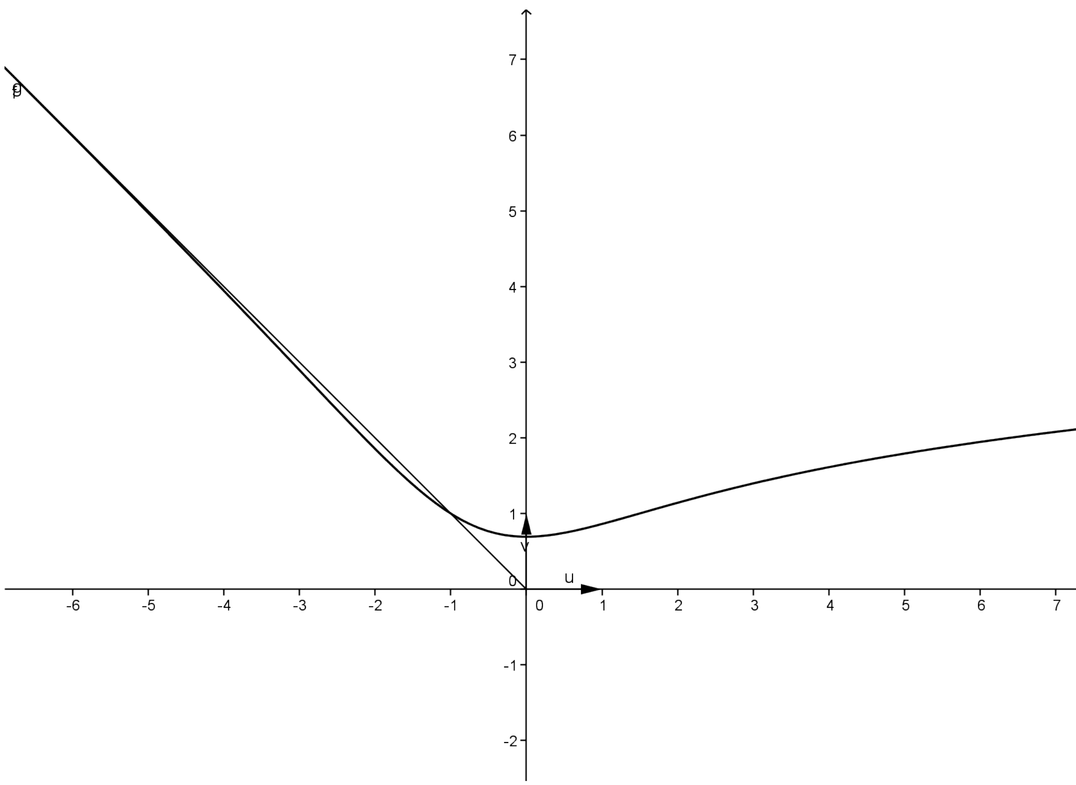
b) $\lim_{x\to+\infty} \ln(\frac{x+2}{x}) = 0$,
donc $0 < \lim_{x\to+\infty} \overline{MN} < 0$, d'où d'après le théorème des gendarmes

$$\lim_{x\to+\infty} \overline{MN} = 0.$$

3. **a)** Démontrons que $f(x) = -x + \ln(xe^x + e^x + 1),\ \forall x \in \mathbb{R}$.
On sait que $f(x) = \ln(x + 1 + e^{-x}) = \ln(\frac{(x+1)e^x + 1}{e^x})$.
Cherchons le signe de $m(x) = (x+1)e^x + 1$.
On a $m^{'}(x) = (x+2)e^x$, et elle s'annule en -2.
m étant décroissante sur $]-\infty; -2]$ et croissante sur $[-2; +\infty[$ alors m admet un un minimum en -2 et $m(-2) = \frac{e^2 - 1}{e^2}$.
Donc pour tout $x,\ \ m(x) > 0$. Ainsi donc

$$f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1).$$

b) D'après a) $f(x) = -x + \ln((x+1)e^x + 1)$. Or $\lim_{x\to-\infty} [f(x) + x] = \lim_{x\to-\infty} \ln((x+1)e^x + 1) = 0$. Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une asymptote oblique (Δ), d'équation $y = -x$ au voisinage de $-\infty$.
<u>Position de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à (Δ) :</u>
Cherchons le signe de $\ln((x+1)e^x + 1)$.
$\ln((x+1)e^x + 1) \geq 0$ si $(x+1) \geq 0$.
Alors $(\mathcal{C}_f)$ est en dessous de (Δ) au voisinage de $-\infty$.
Au voisinage de $+\infty$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = 0$.
Donc $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche infinie de direction l'axe (Ox).



g
u
v
0