UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 G 18 Bis AR
4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 *points*).

Les organisateurs d'une finale d'un concours de chant font appel à 10 musiciens qui leur proposent chacun 2 chansons. Les 20 chansons proposées sont toutes différentes.

Les titres de ces chansons sont marqués sur 20 cartons identiques indiscernables au toucher (Un titre de chanson par carton) et ces cartons sont placés dans une enveloppe.

Deux candidats sont finalistes dans un ordre de passage fixé par le jury. Le premier candidat tire de l'enveloppe deux cartons simultanément et interprète les chansons dont les titres sont marqués sur les cartons tirés dans l'ordre qu'il veut. Ces deux cartons sont alors retirés de l'enveloppe. Le deuxième candidat tire à son tour deux cartons simultanément de l'enveloppe et interprète les chansons dont les titres sont marqués sur les cartons tirés dans l'ordre de son choix.

On note A_1 l'événement « les deux chansons choisies par le premier candidat sont proposées par un même musicien » et A_2 l'événement « les deux chansons choisies par le deuxième candidat sont proposées par un même musicien ».

1. a. Calculer $p(A_1)$ et $p(A_2/A_1)$. $0.25 + 0.5$ *pt*

b. Calculer la probabilité que chacun des deux candidats choisissent deux chansons proposées par un même musicien. 0.25 *pt*

2. Calculer $p(A_2/\overline{A_1})$ puis $p(A_2)$. 0.25 *pt* $+ 0.75$ *pt*

3. Calculer $p(A_1 \cup A_2)$. 0.5 *pt*

4. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de candidats ayant choisi deux chansons proposées par le même musicien.

a. Déterminer la loi de probabilité de X. 0.5 *pt*

b. Calculer $E(X)$. 0.5 *pt*

5. Deux des 20 chansons sont particulièrement difficiles à interpréter. Quelle est la probabilité que chacun des candidats interprète une et une seulement de ces chansons. 0.5 *pt*

Exercice 2 (4 points). Tous les objets cités dans l'exercice sont dans un même plan.

Soit $(\mathcal{D})$ une droite et A un point n'appartenant pas à $(\mathcal{D})$. $(\mathcal{C})$ est le cercle de centre A tangent à la droite $(\mathcal{D})$. H est le point d'intersection de $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{D})$.

1. Soit F un point de $(\mathcal{C})$ distinct de H.

a. Vérifier que le point F est le foyer d'une parabole $(\mathcal{P})$ ayant pour directrice la droite $(\mathcal{D})$ et passant par le point A. 0.75 *pt*

b. Préciser la position F_0 de F pour laquelle la parabole $(\mathcal{P})$ a pour sommet A. 0.5 *pt*

2. On désigne par $(\mathcal{F})$ la famille des paraboles de directrice $(\mathcal{D})$ et passant par A. Soient $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q}')$ deux paraboles distinctes de cette famille, de foyers respectifs F et F'.

a. Montrer que si F et F' sont diamétralement opposés sur le cercle $(\mathcal{C})$ alors les tangentes en A respectivement à $(\mathcal{Q})$ et $(\mathcal{Q}')$ sont perpendiculaires. 0.75 *pt*

b. Etudier la réciproque. 0.5 *pt*

3. On fait varier le point F sur $(\mathcal{C})$ privé des points H et F_0 et on désigne par B le deuxième point d'intersection de la parabole $(\mathcal{P})$ de foyer F et de directrice $(\mathcal{D})$ avec la droite (FA).

a. Montrer que, quand F décrit le cercle $(\mathcal{C})$ privé des points H et F_0, le point B appartient à une parabole fixe $(\mathcal{E})$ de foyer A dont on précisera la directrice. 0.75 *pt*

b. Montrer que les paraboles $(\mathcal{P})$ et $(\mathcal{E})$ ont la même tangente en B. 0.75 *pt*

PROBLEME (12 points)**.**

Partie A

1. Soit u la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par

$$u(x) = -\frac{1}{x} - 1 + \ln(-x).$$

Etudier les variations de u. 0.5 *pt*

2. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par

$$\begin{cases} f(x) &= u(x) \text{ si } x < 0 \\ f(x) &= u\left(-\dfrac{1}{x}\right) \text{ si } x > 0 \end{cases}$$

a. Etudier les variations de f. 0.5 *pt*

b. Tracer la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. 1 *pt*

3. Soit h un réel donné tel $0 < h \leq 1$.

a. Calculer l'aire $A(h)$ du domaine $D(h)$ délimité par les droites d'équations $x = h, x = 1$, l'axe des abscisses et la courbe de f. 0.5 *pt*

b. Calculer la limite de $A(h)$ lorsque h tend vers 0. 0.25 *pt*

c. Déduire de l'étude de f que pour $x > 0$ on a l'inégalité : $(E_1)\ : \ln x \leq x - 1$. 0.25 *pt*

Partie B

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2 et $a_1, \ldots, a_n$ réels strictement positifs. On pose

$$\alpha = \frac{1}{n}(a_1 + \cdots + a_n), \beta = \sqrt[n]{a_1 \ldots . a_n} \text{ et } \frac{n}{\gamma} = \frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}.$$

Les nombres α, β et γ sont respectivement les moyennes arithmétique, géométrique et harmonique des nombres $a_1, \ldots, a_n, n$.

1. a. Dans le cas où $n = 2$, montrer que $\gamma \leq \beta \leq \alpha$. 0.5 *pt*

b. Dans quel cas a-t-on $\gamma = \beta = \alpha$? 0.5 *pt*

2. a. En appliquant l'inégalité (E_1) successivement pour $x = \dfrac{a_1}{\alpha}, \dfrac{a_2}{\alpha}, \ldots, \dfrac{a_n}{\alpha}$ et en combinant les n inégalités obtenues, montrer l'inégalité $(E_2)\ : \beta \leq \alpha$. 1 *pt*

b. En remplaçant dans (E_2) les n nombres $a_1, \ldots, a_n$ par leurs inverses, montrer l'inégalité $(E_3)\ : \gamma \leq \beta$. 1 *pt*

Partie C

1. Soit x un réel strictement supérieur à 0. En utilisant les questions précédentes montrer que

$$\frac{2x}{1+x} \leq \sqrt{x} \leq \frac{1+x}{2}$$

0.5 *pt*

2. On se propose de prendre comme valeur approchée de $\sqrt{x}$ la moyenne arithmétique $m(x)$ des nombres $\dfrac{2x}{1+x}$ et $\dfrac{1+x}{2}$.

L'erreur commise est alors $|m(x) - \sqrt{x}|$.

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g(x) = |m(x) - \sqrt{x}|$.

a. Montrer pour tout $x > 0, m(x) \geq \sqrt{x}$; étudier le cas d'égalité. 2×0.25 *pt*

b. Démontrer que g admet une dérivée seconde en tout point de $\mathbb{R}_+^*$ et donner sans calcul la valeur de $g'(1)$. 2×0.5 *pt*

c. Montrer que g' est strictement croissante. 0.5 *pt*

d. En déduire que pour tout $x \in \left[\dfrac{1}{2}, \dfrac{3}{2}\right]$, $g(x) \leq 2 \times 10^{-3}$. 0.5 *pt*

Partie D

1. En appliquant l'inégalité (E_2) montrer que pour tout entier n strictement positif, on a l'inégalité $\sqrt[n]{n!} \leq \dfrac{n+1}{2}$. 1 *pt*

2. a. Montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \int_1^n \frac{dx}{x}$. 1 *pt*

b. En déduire que pour tout entier n non nul, on a l'inégalité : $\dfrac{n}{1+\ln n} \leq \sqrt[n]{n!}$. 0.5 *pt*

c. Calculer $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n^2}$. 0.5 *pt*