UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis B 01
Durée: 2 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 2$^{\text{ème}}$ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (4 pts).

1. On considère un triangle EFG tel que :

$$\begin{cases} FG = \sqrt{2}\ EF \\ \left(\overrightarrow{FE}, \overrightarrow{FG}\right) = \dfrac{\pi}{4} \end{cases}$$

a) Montrer que $EF = EG$.

[On pourra calculer EG^2 en utilisant la relation $\overrightarrow{EG} = \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG}$.] **1 pt**

b) En déduire que le triangle EFG est rectangle et isocèle. $0,5$ **pt**

2. Dans le plan orienté on considère un triangle ABC, rectangle et isocèle en A ; on suppose que $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On note $A\,'$ le symétrique de A par rapport au point C.

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe s qui transforme $A\,'$ en C et C en B. $0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

b) Soit Ω le centre de la similitude s. Démontrer que le triangle ΩCB est direct, rectangle et isocèle.

1 **pt**

c) En déduire une construction de Ω. $0,5$ **pt**

EXERCICE 2 (4 pts).

1. Déterminer la solution f de l'équation différentielle

$$(E:) \quad y\,'' + 4y\,' + 4y = 0$$

vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$ et $f\,'(0) = 1$. 1 **pt**

2. Soit g la fonction définie par : $g(x) = (x+3)\mathrm{e}^{-2x}$.

a) Montrer que g est une solution de (E). $0,5$ **pt**

b) Déterminer une primitive G de g en utilisant :

i : l'équation différentielle (E). $0,75$ **pt**

ii : une intégration par parties. $0,75$ **pt**

3. Soit F la fonction définie par :

$$F(x) = -\frac{1}{4}(2x+1)\mathrm{e}^{-2x} + \frac{1}{4}.$$

a) Montrer que la restriction H de F à $[0,\ +\infty[$ est une bijection de $[0,\ +\infty[$ sur un intervalle à préciser. $0,5$ **pt**

b) Déterminer l'ensemble de dérivabilité de H^{-1}, fonction réciproque de H.

$0,5$ **pt**

EXERCICE 3 (4 pts).

1. En utilisant l'algorithme d'Euclide déterminer le pgcd de 231 et 3311. 1 **pt**

2. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On pose :
$$A_n = 1 + 2 + \cdots + n \text{ et } B_n = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2.$$
Démontrer que $A_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ et $B_n = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$. $2 \times 0,5 = 1$ **pt**

3. a) Démontrer que pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{2}k(3k+1)$ est un entier. $0,5$ **pt**
b) On suppose que n est un multiple de 3. Déterminer le pgcd de A_n et B_n. 1 **pt**

4. Vérifier le résultat obtenu dans le cas où $n = 21$. $0,5$ **pt**

EXERCICE 4 (4 pts).

Dans le plan complexe on considère l'application φ qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = -\frac{1}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)$$
On note A le point d'affixe i.

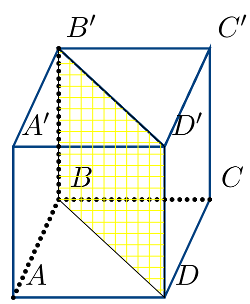
1. Déterminer l'affixe de A' image de A par φ. 1 **pt**

2. Montrer que $\dfrac{z'+i}{z'-i} = \dfrac{1}{\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2}$, pour tout z distinct de i et de $-i$. 1 **pt**

3. En déduire $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'})$ en fonction de $(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MA'})$. 1 **pt**

4. Déterminer l'ensemble des points M tels que $(\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi[2\pi]$. 1 **pt**

EXERCICE 5 (4 pts).



Soit $ABCDA'B'C'D'$ un cube (Voir figure ci-contre).
On désigne par :
s_1 réflexion de base le plan $(AA'B'B)$.
s_2 réflexion de base le plan $(BB'CC')$.
s_3 réflexion de base le plan $(CC'DD')$.
s_4 réflexion de base le plan $(DD'AA')$.

1. a) Montrer que $r = s_2 \circ s_1$ est un demi tour dont on précisera l'axe. 1 **pt**
b) Déterminer la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $r' = s_4 \circ s_3$. 1 **pt**

2. On note s la réflexion de base le plan $(BB'DD')$.
a) Déterminer les réflexions s' et s'' telles que $r = s \circ s'$ et $r' = s'' \circ s$. 1 **pt**
b) En déduire que $t = r' \circ r$ est la translation de vecteur $2\,\overrightarrow{BD}$. 1 **pt**