

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^o 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

1. CORRECTIONS

CORRECTION 1.

1. $u_0 = 27, u_1 = 77, u_2 = 227, u_4 = 677$

Conjecturons que les deux derniers chiffres de u_n sont 27 ou 77

2. Puisque le premier terme u_0 est un entier, on montre facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n est un entier.

On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $u_{n+2} = 3 u_{n+1} - 4 = 3 (3 u_n - 4) - 4 = 9 u_n - 16$; donc $u_{n+2} - u_n = 8 u_n - 16 = 8(u_n - 2)$

Ainsi $u_{n+2} - u_n$ est un multiple de 8; ce qui se traduit par $u_{n+2} \equiv u_n [8]$

En prenant pour n un entier pair $2p$, $p \in \mathbb{N}^*$ cette relation se traduit par $u_{2(p+1)} \equiv u_{2p} [8]$ c'est à dire en posant pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $u_{2p} = a_p$: $a_{p+1} \equiv a_p [8]$

Deux termes consécutifs de la suite (a_p) sont donc congrus modulo 8; donc tous les termes sont congrus au premier terme $a_0 = u_0 = 27$ qui lui-même est congru à 3. Conclusion $u_{2n} \equiv 3 [8]$

En prenant pour n un entier impair $2p+1$, $p \in \mathbb{N}^*$ cette relation se traduit par $u_{2(p+1)+1} \equiv u_{2p+1} [8]$ c'est à dire en posant pour tout $p \in \mathbb{N}^*$: $u_{2p+1} = b_p$: $b_{p+1} \equiv b_p [8]$

Deux termes consécutifs de la suite (b_p) sont donc congrus modulo 8; donc tous les termes sont congrus au premier terme $b_0 = u_1 = 77$ qui lui-même est congru à 5. Conclusion $u_{2n+1} \equiv 5 [8]$

3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_{n+1} = u_{n+1} - 2 = 3u_n - 6 = 3(u_n - 2) = 3v_n$.

La suite (v_n) est donc géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 - 2 = 25$.

Par conséquent, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $v_n = 3^n v_0$ c'est à dire $u_n = 2 + 25 \times 3^n$ ou $2u_n = 4 + 50 \times 3^n$

4. De cette relation on déduit $2u_n - 54 = 50(3^n - 1)$, ce qui entraîne : $2u_n - 54 \equiv [50]$

De plus $(3^n - 1)$ est pair parce que 3^n est impair; donc $2u_n - 54$ est un multiple de $2 \times 50 = 100$ c'est à dire $2u_n - 54 \equiv [100]$.

Cette dernière relation se traduit par : il existe un entier q tel que $2u_n = 54 + 100q$ soit, $u_n = 27 + 50q$. Le nombre $50q$ se terminant par 50 ou 100, le nombre u_n se termine par $27 + 50 = 77$ ou $27 + 00 = 27$

5. Remarquons d'abord que u_n est impair parce que son écriture décimale se termine par 7; donc tous ses diviseurs sont impairs.

Soit d un diviseur commun positif de u_{n+1} et u_n . Il existe deux entiers p et q (dépendant de n) tels que $u_{n+1} = pd$ et $u_n = qd$.

La relation $u_{n+1} = 3u_n - 4$ qui définit la suite (u_n) devient $d(3q - p) = 4$. Ainsi d , qui est un nombre impair, divise 4 c'est à dire $d = 1$ et u_{n+1} et u_n sont bien premiers entre eux.

On peut aussi dire : Si a et b sont deux entiers tels qu'il existe deux entiers q et r avec $a = bq + r$ alors $a \wedge b = b \wedge r$ et l'écriture $u_{n+1} = 3u_n - 4$ montre que $u_{n+1} \wedge u_n = u_n \wedge 4 = 1$ la dernière égalité provenant de ce que les seuls diviseurs positifs de 4 sont 1, 2 et 4 et u_n est impair.

CORRECTION 2.

1. a) Pour montrer que f est une isométrie, il suffit de vérifier qu'elle conserve la distance.

Soient $M(x_M, y_M, z_M)$ et $N(x_N, y_N, z_N)$ deux points quelconques de \mathcal{E} et $M'(x_{M'}, y_{M'}, z_{M'})$ et $N'(x_{N'}, y_{N'}, z_{N'})$ leurs images respectives par f c'est à dire

$$\begin{cases} x_{M'} = y_M \\ y_{M'} = z_M + 1 \\ z_{M'} = x_M - 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x_{N'} = y_N \\ y_{N'} = z_N + 1 \\ z_{N'} = x_N - 1 \end{cases}$$

Alors

$$\begin{aligned} M'N'^2 &= (x_{N'} - x_{M'})^2 + (y_{N'} - y_{M'})^2 + (z_{N'} - z_{M'})^2 \\ &= (y_N - y_M)^2 + (z_N - z_M)^2 + (x_N - x_M)^2 \\ &= MN^2 \end{aligned}$$

Un point $M(x, y, z)$ de \mathcal{E} est invariant si et seulement si $f(M) = M$ c'est à dire

$$\begin{cases} x = y \\ y = z + 1 \\ z = x - 1 \end{cases}$$

Ce système est donc équivalent à $x = y = z + 1$

On reconnaît là un système d'équations d'une droite.

L'ensemble des points invariants par f est la droite d'équations : $x = y = z + 1$

Le point A appartient manifestement à cette droite puisque $x_A = y_A = z_A + 1$

Le point $B(1, 1, 0)$ appartient aussi à cette droite puisque $x_B = y_B = z_B + 1$.

Le vecteur $\vec{u} = \overrightarrow{AB}(1, 1, 1)$ est donc un vecteur directeur de cette droite

L'ensemble des points invariants par f est bien la droite Δ .

On peut aussi trouver un vecteur directeur de Δ en partant d'une représentation paramétrique de Δ .

Prenons z comme paramètre. La relation $x = y = z + 1$ est équivalente à

$$\begin{cases} x = t + 1 \\ y = t + 1 \\ z = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$$

Le vecteur $\vec{u}(1, 1, 1)$ est donc un vecteur directeur de cette droite

2. Etant donné que le point A appartient à P ,

pour prouver que le point I appartient à P , il suffit d'établir que \overrightarrow{AI} est orthogonal à \vec{u} c'est à dire $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = 0$.

\overrightarrow{AI} ayant pour coordonnées $(-1, 0, 1)$ on a bien : $\overrightarrow{AI} \cdot \vec{u} = -1.1 + 0.0 + 1.1 = 0$

$$\text{a) } I' = f(I) \text{ a pour coordonnées } \begin{cases} x_{I'} = y_I = 0 \\ y_{I'} = z_I + 1 = 1 \\ z_{I'} = x_I - 1 = -2 \end{cases}$$

Etant donné que le point A appartient à P ,

pour prouver que le point I' appartient à P , il suffit d'établir que $\overrightarrow{AI'}$ est orthogonal à \vec{u} c'est à dire $\overrightarrow{AI'} \cdot \vec{u} = 0$.

$\overrightarrow{AI'}$ ayant pour coordonnées $(0, 1, -2)$ on a bien : $\overrightarrow{AI'} \cdot \vec{u} = 0.1 + 1.1 - 1.1 = 0$.

On peut aussi donner une équation de P et établir que les coordonnées des points I et I' vérifient cette équation.

Puisque le vecteur \vec{u} est normal à P , une équation cartésienne de P sera de la forme $x + y + z + d = 0$. Dire que A appartient P signifie alors que $1 + d = 0$ c'est à dire $d = -1$.

3. f étant une isométrie de l'espace dont l'ensemble des points invariants est la droite Δ , elle est une rotation d'axe Δ . Son angle a pour mesure $\theta = (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AI'})$.

Or $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{AI'} = AI \cdot AI' \cos \theta$; \overrightarrow{AI} a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$ et $\overrightarrow{AI'}$ a pour coordonnées $(1, 0, -1)$. Donc $-1 = \sqrt{2} \sqrt{2} \cos \theta$ c'est à dire $\cos \theta = -\frac{1}{2}$; on peut donc prendre

$$\theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = -\frac{2\pi}{3} \quad (\text{selon l'orientation de } \Delta)$$

4. a) Notons Q_1 l'ensemble des points M de \mathcal{E} d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient au plan Q d'équation $2x + y - z = 0$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de \mathcal{E} et $M'(x', y', z')$ son image par f c'est à dire
$$\begin{cases} x' = y \\ y' = z + 1 \\ z' = x - 1 \end{cases}$$

Les coordonnées du milieu J de $[MM']$ sont

$$\begin{aligned} x_J &= \frac{1}{2}(x + x'), & y_J &= \frac{1}{2}(y + y') & \text{et } z_J &= \frac{1}{2}(z + z') \\ x_J &= \frac{1}{2}(x + y), & y_J &= \frac{1}{2}(y + z + 1) & \text{et } z_J &= \frac{1}{2}(z + x - 1) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} M \in Q_1 &\Leftrightarrow J \in Q \\ &\Leftrightarrow 2(x + y) + (y + z + 1) - (z + x - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow x + 3y + 2 = 0 \end{aligned}$$

L'ensemble des points M de \mathcal{E} d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient au plan Q d'équation $2x + y - z = 0$ est donc le plan d'équation $x + 3y + 2 = 0$.

b) Notons D_1 l'ensemble des points M de \mathcal{E} d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient à la droite (D) d'équations $x = y = z$.

Soit $M(x, y, z)$ un point de Q_1 et $M'(x', y', z')$ son image par f .

Les coordonnées du milieu J de $[MM']$ sont $x_J = \frac{1}{2}(x + y)$, $y_J = \frac{1}{2}(y + z + 1)$ et $z_J = \frac{1}{2}(z + x - 1)$.

Donc

$$\begin{aligned} M \in D_1 &\Leftrightarrow J \in (D) \\ &\Leftrightarrow x + y = y + z + 1 = z + x - 1 (*) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ -x + y + 2 = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

L'ensemble des points M de \mathcal{E} d'images M' tels que le milieu J de $[MM']$ appartient à la droite (D) d'équations $x = y = z$ est donc le droite d'équations

$$\begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ x - y - 2 = 0 \end{cases}.$$

La relation $(*)$ constitue aussi un système d'équations de notre ensemble!

PROBLEME. (12 pts)

Partie A

1. a) La fonction f''' étant continue dans l'intervalle fermé borné I , est bornée (et atteint même ses bornes)

Il existe donc un réel $K > 0$ tel que pour tout $x \in I$, $|f'''(x)| \leq K$.

Alors

$$\begin{aligned} \left| \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx \right| &\leq \text{signe}(a) \int_0^a |(a-x)^2 f'''(x)| dx \\ &\leq M \cdot \text{signe}(a) \int_0^a (a-x)^2 dx \\ &= \frac{1}{3} M \cdot \text{signe}(a) \left[-(a-x)^3 \right]_0^a \\ &= \frac{1}{3} M \cdot \text{signe}(a) a^3 \\ &= \frac{1}{3} M |a|^3 \end{aligned}$$

Ensuite $0 \leq \left| \frac{1}{a^2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx \right| \leq \frac{1}{3} M |a| \xrightarrow{a \rightarrow 0} 0$

et (Théorème des gendarmes) : $\lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a^2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx = 0$

b) La dérivée de $f''g' - f'g''$ est

$$(f''g' - f'g'')' = f'''g' + f''g'' - (f''g'' + f'g''') = f'''g' - f'g'''$$

En intégrant cette relation de 0 à a on obtient :

$$\int_0^a (f''g' - f'g'')'(x) dx = \int_0^a (f'''(x)g'(x) - f'(x)g'''(x)) dx$$

c'est à dire la relation demandée

$$\int_0^a f'(x)g'''(x) dx = \left[(f'g'' - f''g')(x) \right]_0^a + \int_0^a f'''(x)g'(x) dx$$

2. On prend $g(x) = \frac{1}{6}(a-x)^3$.

a) $g'(x) = -\frac{1}{2}(a-x)^2$, $g''(x) = a-x$ et $g'''(x) = -1$, et la relation précédente devient :

$$-\int_0^a f'(x) dx = \left[(f'g'' - f''g')(x) \right]_0^a + \int_0^a f'''(x)g'(x) dx$$

En remarquant que g' et g'' s'annulent au point a :

$$-(f(a) - f(0)) = -(f'(0)g''(0) - f''(0)g'(0)) - \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx$$

Il ne reste plus qu'à remplacer $g'(0)$ et $g''(0)$ par leurs valeurs respectives $-\frac{1}{2}a^2$ et a pour avoir

la relation demandée

$$f(a) = f(0) + f'(0)a + \frac{1}{2}f''(0)a^2 + \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 f'''(x) dx$$

b) Appliquons le résultat précédent à la fonction f définie par $f(x) = e^x$.

Toutes les dérivées de f en x sont égales à e^x ; donc toutes les dérivées de f en 0 sont égales à 1.

La relation précédente devient alors :

$$e^a = 1 + 1.a + \frac{1}{2}.1.a^2 + \frac{1}{2} \int_0^a (a-x)^2 e^x dx$$

c'est à dire $\frac{e^a - a - 1}{a^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2a^2} \int_0^a (a-x)^2 e^x dx$ et la question 1 permet de conclure, puisque la fonction $x \mapsto e^x$ est bornée dans $[-1, 1]$:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{e^a - a - 1}{a^2} = \frac{1}{2} + \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{2a^2} \int_0^a (a-x)^2 e^x dx = \frac{1}{2}.$$

3. a) $\lim_{t \rightarrow 0} x(t) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t}{e^t - 1} = 1 = x(0)$, donc la fonction x est continue au point 0.

$\lim_{t \rightarrow 0} y(t) = \lim_{t \rightarrow 0} x(t)e^t = 1 = y(0)$, donc la fonction y est continue au point 0.

Regardons le taux d'accroissement τ_1 de x au point 0

$$\begin{aligned} \forall t \neq 0, \tau_1(t) &= \frac{x(t) - x(0)}{t} \\ &= \frac{t - e^t + 1}{t(e^t - 1)} \\ &= -\frac{e^t - t - 1}{t^2} \frac{t}{e^t - 1} \end{aligned}$$

Le premier facteur de ce dernier membre a pour limite $-\frac{1}{2}$ quand t tend vers 0 d'après l'application. Le deuxième facteur a pour limite 1 quand t tend vers 0.

Donc x est dérivable au point 0 et $x'(0) = -\frac{1}{2}$

Regardons le taux d'accroissement τ_2 de y au point 0

$$\begin{aligned} \forall t \neq 0, \tau_2(t) &= \frac{y(t) - y(0)}{t} \\ &= \frac{x(t)e^t - 1}{t} \\ &= x(t) \frac{e^t - 1}{t} + \frac{x(t) - 1}{t} \end{aligned}$$

Puisque $x(t)$ a pour limite 1 quand t tend vers 0, $\tau_2(t)$ a pour limite $1 \times 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ quand t tend vers 0.

Donc y est dérivable au point 0 et $y'(0) = \frac{1}{2}$

b) La tangente à \mathcal{G} au point $A(1, 1)$ est la droite passant par A et de vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Partie B

1. a) Pour simplifier, nous allons poser $u_n = e + \frac{1}{n}$.

La fonction $f_1 : x \mapsto e^x$ est dérivable sur \mathbb{R} et $\forall x \in \mathbb{R}, f_1'(x) = e^x$; la fonction $f_2 : x \mapsto \sqrt{x}$ est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f_2'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

Comme f égale $f_1 \circ f_2 - u_n \cdot f_2$, elle est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = f_1'(f_2(x))f_2'(x) - u_n f_2'(x) = f_2'(x)(f_1'(f_2(x)) - u_n)$$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - u_n)$$

Pour étudier la dérivabilité de f_n à droite en 0, regardons le taux d'accroissement

$$\tau(x) = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0}, x > 0$$

$$\tau(x) = \frac{e^{\sqrt{x}} - u_n \sqrt{x} - 1}{x}$$

Posons $a = \sqrt{x}$. Alors quand x tend vers 0^+ , a aussi tend vers 0^+ et

$$\tau(x) = \frac{e^a - u_n a - 1}{a^2} = \frac{e^a - a - 1}{a^2} + \frac{(1 - u_n)}{a}$$

Dans le dernier membre de cette relation, le premier terme a pour limite $\frac{1}{2}$ d'après la partie

A; le deuxième terme a pour limite $-\infty$. Donc

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \tau(x) = -\infty$$

La fonction f_n n'est donc pas dérivable au point 0 et de plus au point de C_{f_n} d'abscisse 0 (c'est le point de coordonnées (0, 1)) il y a une demi-tangente verticale.

Remarque 1. Pour étudier la dérivabilité de f_n en 0, on utilise souvent le théorème suivant :

Théorème 1. Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I , dérivable sur I sauf peut-être en un point a de I . Alors

- (i) Si f' a une limite ℓ quand x tend vers a , alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$
- (ii) Si f' a pour limite $+\infty$ ou $-\infty$ quand x tend vers a , alors f n'est pas dérivable en a et de plus au point de C_f d'abscisse a il y a une tangente verticale.

Dans le cas présent, $\forall x > 0$, $f_n'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(e^{\sqrt{x}} - u_n)$ et en posant comme précédemment $a = \sqrt{x}$, on a :

$$\forall x > 0, f_n'(x) = \frac{1}{2} \frac{e^a - u_n}{a} = \frac{1}{2} \frac{e^a - 1}{a} + \frac{1}{2} \frac{1 - u_n}{a} \xrightarrow{a \rightarrow 0^+} \text{''} \frac{1}{2} - \infty \text{''} = -\infty$$

b) Au voisinage de $+\infty$, on a une indétermination de la forme " $+\infty - \infty$ ". Pour lever cette indétermination écrivons : $f_n(x) = \sqrt{x} \left(\frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} - u_n \right)$, puis en posant toujours $a = \sqrt{x}$,

$$f_n(x) = a \left(\frac{e^a}{a} - u_n \right). \text{ Comme } \lim_{a \rightarrow +\infty} \frac{e^a}{a} = +\infty, \text{ il vient } \lim_{a \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty.$$

$$\text{On a aussi } \frac{f_n'(x)}{x} = \left(\frac{e^a}{a^2} - \frac{u_n}{a} \right) \text{ puis } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n'(x)}{x} = +\infty.$$

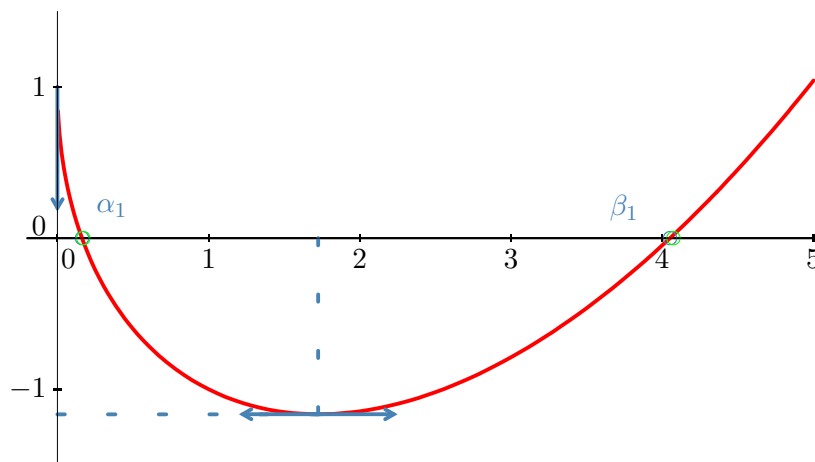
Pour $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned} f_n'(x) > 0 &\Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} - u_n > 0 \Leftrightarrow e^{\sqrt{x}} > u_n \\ &\Leftrightarrow \sqrt{x} > \ln u_n \Leftrightarrow x > (\ln u_n)^2 \end{aligned}$$

Voici le tableau de variations de f_n .

x	0	α_n	1	$(\ln u_n)^2$	β_n	$+\infty$
$f_n'(x)$		-	-		+	
f_n	1	0	$-\frac{1}{n}$	$u_n(1 - \ln u_n)$	0	$+\infty$

c) Et voici la courbe \mathcal{C}_1 et ses tangentes verticale et horizontale.



2. a) Puisque u_n est strictement supérieur à e , $\ln u_n$ est strictement supérieur à 1 ; donc $f((\ln u_n)^2) = u_n(1 - \ln u_n)$ est strictement négatif.

Comme $f(0) = 1$ est strictement positif, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $]0, (\ln u_n)^2[$ une solution unique α_n .

De même, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$ permet d'affirmer d'après ce même théorème que l'équation $f_n(x) = 0$ admet dans $](\ln u_n)^2, +\infty[$ une solution unique β_n .

$1 < (\ln u_n)^2$ et $f_n(1) = -\frac{1}{n} < 0 = f_n(\alpha_n)$ entraîne $\alpha_n < 1$ car f_n est strictement décroissante dans $[1, (\ln u_n)^2]$

Ainsi on a bien

$$\alpha_n < 1 < (\ln u_n)^2 < \beta_n$$

b)

Pour que la formule d'intégration par parties puisse être appliquée, v doit être tel que $wv' = e^{\sqrt{x}}$, ce qui nécessite $v' = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ ou $v' = 2(e^{\sqrt{x}})'$.

On peut donc prendre $v = 2e^{\sqrt{x}}$. La formule donne alors

$$\begin{aligned} \int_0^b e^{\sqrt{x}} dx &= [uv]_0^b - \int_0^b \frac{1}{2\sqrt{x}} 2e^{\sqrt{x}} dx \\ &= [uv]_0^b - \int_0^b v' dx \\ &= [uv - v]_0^b \end{aligned}$$

Finalement

$$\int_0^b e^{\sqrt{x}} dx = 2 + 2e^{\sqrt{b}}(\sqrt{b} - 1)$$

c) On a $\int_0^b \sqrt{x} dx = \int_0^b x^{\frac{1}{2}} dx = \left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^b = \left[\frac{2}{3} x\sqrt{x} \right]_0^b = \frac{2}{3} b\sqrt{b}$

Par conséquent $\int_0^b f(x) dx = 2 + 2e^{\sqrt{b}}(\sqrt{b} - 1) - \frac{2}{3} u_n b\sqrt{b}$

La relation $f_n(\alpha_n) = 0$ se traduit par $e^{\sqrt{\alpha_n}} - u_n\sqrt{\alpha_n} = 0$ c'est à dire $e^{\sqrt{\alpha_n}} = u_n\sqrt{\alpha_n}$.

Donc

$$\begin{aligned} I_n &= 2 + 2e^{\sqrt{\alpha_n}}(\sqrt{\alpha_n} - 1) - \frac{2}{3} u_n \alpha_n \sqrt{\alpha_n} \\ &= 2 + 2u_n\sqrt{\alpha_n}(\sqrt{\alpha_n} - 1) - \frac{2}{3} u_n \alpha_n \sqrt{\alpha_n} \end{aligned}$$

$$I_n = 2 + 2u_n\sqrt{\alpha_n} \left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3}\alpha_n - 1 \right)$$

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $\varphi(x) = \frac{e^x}{x}$

a) La fonction φ est continue et dérivable dans \mathbb{R}_+^* , et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^x$$

Le signe de $\varphi'(x)$ est donc celui de $x-1$. Voici le tableau de variations de φ .

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	-	0	+
φ	$+\infty$	e	$+\infty$

La fonction φ est continue et strictement décroissante dans V_1 . Sa restriction à V_1 est donc une bijection h_1 de V_1 dans $\varphi(V_1) = W = [e, +\infty[$.

La fonction φ est continue et strictement croissante dans V_2 . Sa restriction à V_2 est donc une bijection h_2 de V_2 dans $\varphi(V_2) = W$

b) La relation $f_n(\alpha_n) = 0$ se traduit par $e^{\sqrt{\alpha_n}} - u_n \sqrt{\alpha_n} = 0$ c'est à dire $\frac{e^{\sqrt{\alpha_n}}}{\sqrt{\alpha_n}} = u_n$ ou, puisque α_n appartient à V_1 , $u_n = h_1(\alpha_n)$.

On en déduit, puisque h_1 est une bijection : $\alpha_n = h_1^{-1}(u_n)$.

La fonction h_1 étant continue et la suite (u_n) convergente de limite e ,

la suite (α_n) est convergente et de limite $h_1^{-1}(e) = 1$

Sachant que la suite (α_n) est convergente, la relation $I_n = 2 + 2u_n \sqrt{\alpha_n} \left(\sqrt{\alpha_n} - \frac{1}{3} \alpha_n - 1 \right)$

montre que

la suite (I_n) est aussi convergente et de limite $2 + 2e \cdot 1 \left(1 - \frac{1}{3} - 1 \right) = 2 - \frac{2}{3}e$
 c) Le même raisonnement montre que la suite (β_n) est convergente et de limite $h_2^{-1}(e) = 1$

4. a) Les relations $\frac{e^{\sqrt{\alpha_n}}}{\sqrt{\alpha_n}} = \frac{e^{\sqrt{\beta_n}}}{\sqrt{\beta_n}} = u_n$ montrent que

$\varphi(\sqrt{\alpha_n}) = \varphi(\sqrt{\beta_n})$ c'est à dire , puisque $\sqrt{\alpha_n} \in V_1$ et $\sqrt{\beta_n} \in V_2$,
 $h_1(\sqrt{\alpha_n}) = h_2(\sqrt{\beta_n})$ ou, $\sqrt{\beta_n} = h_2^{-1} \circ h_1(\sqrt{\alpha_n}) = h(\sqrt{\alpha_n})$.
 le point M_n appartient bien au graphe de h .

b)

Soit x un réel

$$x \in D_h \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_{h_1} \\ h_1(x) \in D_{h_2^{-1}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in V_1 \\ h_1(x) \in V_2 \end{cases} \Leftrightarrow x \in V_1$$

Lorsque x tend vers 0, $h_1(x) = \varphi(x)$ tend vers $+\infty$. Lorsque x tend vers $+\infty$, $h_2^{-1}(x)$ tend

vers $+\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow 0} h(x) = +\infty$.

Lorsque x tend vers 1, $h_1(x) = \varphi(x)$ tend vers e . Lorsque x tend vers e , $h_2^{-1}(x)$ tend vers 1

donc $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = 1$.

La fonction h est décroissante car elle la composée de la fonction décroissante h_1 par la fonction croissante h_2^{-1} .

c)

La fonction h_1 est dérivable sur $]0, 1[$ car c'est la restriction de φ à V_1 .

La fonction h_2^{-1} est dérivable sur $]e, +\infty[$ car h_2 est dérivable sur V_2 (c'est la restriction de φ à V_2 ,) et sa dérivée ne s'annule pas dans $]1, +\infty[$.

Donc $h = h_2^{-1} \circ h_1$ est dérivable dans $]0, 1[$.

Pour tout x appartenant à V_1 on a

$$\begin{aligned} \varphi[h(x)] &= h_2[h(x)] && \text{car } h(x) \in V_2 \\ &= h_2[h_2^{-1} \circ h_1(x)] \\ &= h_1(x) \\ &= \varphi(x) && \text{car } x \in V_1 \end{aligned}$$

Remarquons que $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\varphi'(x) = \frac{x-1}{x^2}e^x = \frac{x-1}{x}\varphi(x)$.

En dérivant par rapport à x la relation $\varphi(h(x)) = \varphi(x)$, pour $x \in]0, 1[$ on obtient :
 $\forall x \in]0, 1[$, $\varphi'(h(x))h'(x) = \varphi'(x)$ c'est à dire

$$\begin{aligned} \forall x \in]0, 1[, \quad h'(x) &= \frac{\varphi'(x)}{\varphi'(h(x))} \\ &= \frac{x-1}{x} \varphi(x) \frac{h(x)}{(h(x)-1)\varphi(h(x))} \\ &= \frac{x-1}{x} \frac{h(x)}{h(x)-1} \quad \text{car } \varphi(x) = \varphi(h(x)) \end{aligned}$$

5. La tangente au point A a pour pente $h'(0,4) = \frac{0,4-1}{0,4} \frac{h(0,4)}{h(0,4)-1} = -3$

Une équation de cette tangente est donc $y = -3(x - 0,4) + 2$

Finalement $T_A : -3x + 3,2$

La tangente T_B est déjà déterminée dans la partie A puisque $\mathcal{G} = \mathcal{C}_h$.

