UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

13 G 18 Bis AR
Durée : 4 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*).

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC isocèle de sommet principal A, avec $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\,\pi]$. le point B_1 est le pied de la hauteur issue de B du triangle ABC.

On désigne par r_A la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ et par r_B la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.

1. a. Construire le point D tel que $r_B(D) = A$ et montrer que les points A, C et D sont alignés. $0.25 + 0.5\,pt$

1. b. Justifier que $r_A \circ r_B$ est une rotation.
Déterminer l'image du segment $[BD]$ par $r_A \circ r_B$.
En déduire que le centre de $r_A \circ r_B$ est l'orthocentre H du triangle ABC. $0.25+0.5+0.75\,pt$

2. a. Montrer que les droites (HC) et (BD) sont parallèles. $0.5\,pt$
La droite (BC) coupe (DH) en B_2. On désigne par h_1 l'homothétie de centre B_1 qui transforme C en D et par h_2 l'homothétie de centre B_2 qui transforme D en H.
b. Déterminer l'image du segment $[CH]$ par h_1 ainsi que l'image du segment $[DB]$ par h_2.
Reconnaître les applications $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$ et donner leurs éléments géométriques caractéristiques.
$2 \times 0.25 + 2 \times 0.5\,pts$
c. On note I_1 et I_2 les centres respectifs de $h_1 \circ h_2$ et $h_2 \circ h_1$.
Vérifier que les quatre points I_1, I_2, B_1 et B_2 sont alignés. $0.75\,pt$

Exercice 2 (4 *points*).

On considère l'équation

$$(E) : 5x + 6y = 29 \text{ où } x \text{ et } y \text{ sont des entiers}$$

1. a. Déterminer un couple d'entiers relatifs (u, v) tel que $5u + 6v = 1$.
En déduire une solution particulière de (E). $2 \times 0.5\,pt$
b. Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (E). $0.5\,pt$
Dans l'espace $\mathcal{E}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère le plan $\mathcal{P}$ d'équation

$$5x + 6y + 4z = 29$$

Soit $\mathcal{D}$ la droite d'intersection du plan $\mathcal{P}$ et du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
c. Représenter graphiquement la droite $\mathcal{D}$ dans le plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Montrer que $\mathcal{D}$ a un seul point dont les coordonnées sont des entiers naturels que l'on déterminera. $0.25 + 0,75\,pt$

2. On considère un point M du plan $\mathcal{P}$ dont les coordonnées x, y et z sont des entiers naturels.
a. Montrer que l'entier x est impair. 0.75 *pt*
b. On pose $x = 2p + 1$ où p est un entier naturel.
Montrer que $p + z$ est un multiple de 3. 0.75 *pt*

PROBLEME (11 *points*).

Partie A

On désigne par a un nombre réel de l'intervalle $[0, \pi]$ et on considère la fonction numérique f_a définie par $f_a(x) = \ln(x^2 - 2x\cos a + 1)$. On appelle $\mathcal{C}_a$ la courbe représentative de f_a dans le plan $\mathcal{P}$ muni d'un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ (unité graphique 2 cm).

1. a. Déterminer l'ensemble D_a de définition de f_a suivant les valeurs de a. 0.5 *pt*
b. Trouver les limites quand x tend vers $+\infty$ de $f_a(x)$ et de $\dfrac{f_a(x)}{x}$. 2×0.5 *pt*

2. a. Montrer que C_a admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = \cos a$. 0.25 *pt*
b. Montrer que $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{\pi-a}$ sont symétriques par rapport à la droite $(O, \overrightarrow{j})$. 0.25 *pt*
c. a et a' étant deux réels distincts de l'intervalle $[0, \pi]$, déterminer l'intersection de $\mathcal{C}_a$ et $\mathcal{C}_{a'}$.
0.25 *pt*

3. a. Etudier les variations de f_0 et tracer $\mathcal{C}_0$ dans le repère $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$. $0.5 + 0.25$ *pt*
b. Construire $\mathcal{C}_\pi$ dans le même repère sans étudier f_π. 0.25 *pt*
c. Quand a est différent de 0 et de π, étudier les variations de f_a et tracer $\mathcal{C}_{\pi/3}$. (On fera une autre figure.) $0.5 + 0.25$ *pt*

Partie B

Soit n un entier naturel non nul.

1. a. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^{2n} - 1 = 0$. 0.5 *pt*
b. Soit z_k le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{k\pi}{n}$ où k appartient à

$$I = \{0,\ 1, \ldots, 2n-1\}.$$

A tout élément k de $I_1 = \{1, 2, \ldots, n-1\}$, on associe l'entier $k' = 2n - k$. A quel ensemble appartient alors k'? 0.25 *pt*
Montrer que z_k et $z_{k'}$ sont conjugués. En déduire que le polynôme $P_k(z) = (z - z_k)(z - z_{k'})$ a des coefficients réels que l'on déterminera en fonction de k et n. $0.25 + 0.5$ *pt*
c. On admettra que :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ z^{2n} - 1 = (z - z_0)(z - z_1)\ldots(z - z_k)\ldots(z - z_{2n-1})$$

En utilisant b), montrer que

$$z^{2n} - 1 = (z^2 - 1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(z^2 - 2z\cos\frac{k\pi}{n} + 1\right)$$

0.5 *pt*

2. Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 on considère $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} f_{\frac{k\pi}{n}}(x)$ où x est un réel.
a. Montrer que la fonction S_n est définie et continue sur $\mathbb{R}$. 0.5 *pt*

b. Déduire du 1.c) que si $x \neq 1$ et $x \neq -1$, on a

$$S_n(x) = \ln \frac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}.$$

0.5 *pt*

c. En utilisant **a.** et **b.**, déterminer $S_n(1)$ et $S_n(-1)$.

Indication : On pourra interpréter le rapport $\dfrac{x^{2n} - 1}{x^2 - 1}$ comme une somme de termes consécutifs d'une suite géométrique. 0.5 *pt*

Dans toute la suite du problème, on se donne un réel x différent de 1 et de -1.

3. On considère la fonction g_x telle que

$$\forall t \in [0, \pi],\ g_x(t) = \ln(x^2 - 2x \cos t + 1)$$

Vérifier que g_x est bien définie sur $[0, \pi]$, et qu'elle est intégrable sur $[0, \pi]$. 2×0.5 *pt*

4. On veut calculer $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\pi}{n} S_n(x)$.

a. Pour $|x| < 1$, montrer que $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\pi}{n} S_n(x) = 0$. 0.5 *pt*

b. Pour $|x| > 1$, montrer que $\displaystyle\lim_{n \mapsto +\infty} \frac{\pi}{n} S_n(x) = 2\pi \ln |x|$. 0.5 *pt*

5. Dans cette question on suppose x positif et différent de 1.

a. Vérifier que la fonction g_x est croissante. 0.25 *pt*

b. Soit n un entier naturel non nul. En partageant l'intervalle $[0,\ \pi]$ en n intervalles $\left[\dfrac{k\pi}{n}, \dfrac{(k+1)\pi}{n}\right]$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$, de même longueur $\dfrac{\pi}{n}$ et la croissance de g_x, montrer que

$$\frac{\pi}{n} S_n(x) + \frac{\pi}{n} g_x(0) \leq \int_0^{\pi} g_x(t)\, dt \leq \frac{\pi}{n} S_n(x) + \frac{\pi}{n} g_x(\pi).$$

0.75 *pt*

c. Calculer la valeur de l'intégrale

$$J_x = \int_0^{\pi} \ln(x^2 - 2x \cos t + 1)\, dt$$

0.5 *pt*