

3. Démontrer que : $A_{n+1} = A_n + \frac{\sqrt{3}}{12} \left(\frac{4}{9}\right)^n$.

En déduire que : $\forall n \geq 1 \quad A_n = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right]$ (0,5 + 1) pts

4. Trouver $\lim_{x \rightarrow +\infty} A_n$. 0,25 pt

5. Répondre à la question posée au début de l'exercice. 0,25 pt

PROBLEME (15 points).

Dans le plan orienté \mathcal{P} , on considère trois points non alignés A, B et C tels que la mesure principale β de l'angle (\vec{BC}, \vec{BA}) appartient à $]0, \pi[$.

Soit l'application f de \mathcal{P} dans \mathbb{R} , qui à un point M du plan associe le réel :

$$f(M) = MA + MB + MC$$

On propose de démontrer que f admet un minimum qui est atteint en un seul point.

(C'est-à-dire qu'il existe un unique point T tel que $f(T) \leq f(M)$ pour tout point M de \mathcal{P} .)

Partie A

Soit M et N deux points distincts du plan et I le milieu de $[MN]$.

1. a. Montrer que pour tout point P du plan distinct de M et N , on a :

$$4IP^2 = MP^2 + NP^2 + 2MP \times NP \cos(\widehat{MPN})$$

0.5 pt

b. En déduire que pour tout point P du plan

$$IP \leq \frac{1}{2}(MP + NP)$$

A quelle condition a-t-on l'égalité ?

0.5 + 0.5 pt

c. Montrer que $f(I) < \frac{1}{2}(f(M) + f(N))$

1 pt

d. En déduire que si f admet un minimum, alors il est atteint un seul point.

0.5 pt

Partie B

Dans cette partie ABC est un triangle isocèle en A et H le milieu de $[BC]$.

On note $a = BC$ et $h = AH$

1. Soit M un point du plan, n'appartenant pas à (AH) et M_0 son projeté orthogonal sur la droite (AH) .

a. Montrer que le symétrique B_0 de B par rapport à M_0 est le symétrique de C par rapport à (MM_0) . 0.5 pt

b. Démontrer que :

$$M_0B + M_0C \leq MB + MC \quad \text{puis que} \quad f(M_0) \leq f(M)$$

0.5 + 0.5 pt

c. Démontrer que si $M_0 \notin [AH]$ alors $f(A) < f(M_0)$

0.5 pt

On en déduit que si f admet un minimum en un point, ce point appartient à $[AH]$.

2. Soit M un point de $[AH)$ et φ la mesure de l'angle $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM})$ tel que $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

a. Démontrer que :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et que} \quad f(M) = h + \frac{a}{\cos \varphi} - \frac{a \tan \varphi}{2}$$

0.5 + 1 pt

b.

Soit la fonction : $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto g(x) = h + \frac{a}{\cos x} - \frac{a \tan x}{2}$$

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations.

1.5 pt

c. En déduire que f admet un minimum et préciser le point T qui réalise ce minimum.

(On distinguera le cas $\beta \leq \frac{\pi}{6}$ et le cas $\beta > \frac{\pi}{6}$).

1 pt

Partie C

Dans cette partie ABC est un triangle tel que l'angle \widehat{BAC} a une mesure appartenant à l'intervalle $[\frac{2\pi}{3}, \pi[$.

Rappel : $\vec{u} \cdot \vec{v} \leq \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$

1. a.

Montrer que pour tous points M, N, P , on a :

$$\overrightarrow{MN} \cdot \overrightarrow{NP} \leq NP (MP - NP)$$

0.25 pt

b. En déduire que : $f(M) - f(A) \geq MA \left[1 - \left\| \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC} \right\| \right]$

0.5 pt

2. Montrer que : $\left\| \frac{1}{AB} \overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC} \overrightarrow{AC} \right\| \leq 1$

0.5 pt

3. Que peut-on en déduire de 1.b et 2. ?

0.25 pt

Partie D

Dans cette partie ABC est un triangle dont les angles ont des mesures strictement inférieures à $\frac{2\pi}{3}$.

On construit à l'extérieur du triangle ABC , les triangles équilatéraux ABC', BCA', ACB' .

1. a. Montrer que A' est à l'intérieur du secteur angulaire \widehat{BAC} .

1 pt

(De même on a B' est à l'intérieur du secteur angulaire \widehat{ABC}).

b. Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point T appartenant à l'intérieur du triangle ABC .

0.25 pt

2. On désigne par R la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer $R(A)$ et $R(A')$. En déduire que $(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$

0.5 + 0.5 pt

b. Soit T' l'image de T par R . Montrer que T' appartient à (BB') . 0.25 pt

En déduire que : $(\overrightarrow{TB}, \overrightarrow{TC}) = (\overrightarrow{TC}, \overrightarrow{TA}) = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ 0.5 pt

c. Montrer que $\vec{u} = \frac{1}{TA}\overrightarrow{TA} + \frac{1}{TB}\overrightarrow{TB} + \frac{1}{TC}\overrightarrow{TC} = \vec{0}$ en calculant $\vec{u} \cdot \vec{u}$ 0.25 pt

3. En utilisant **C 1.a** et **D 2.c**, démontrer que pour tout point M du plan, on a :
 $f(M) \geq f(T)$ 0.5 pt

4. En déduire que les droites (AA') , (BB') , (CC') sont concourantes en un point qui réalise le minimum de f et démontrer que ce minimum est égal à BB' . 0.25 + 0.5 pt