CONCOURS GENERAL SENEGALAIS

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

15 1 CGS 02 01
Durée : 5 heures
Toutes séries réunies

CLASSES DE PREMIERE

M A T H E M A T I Q U E S

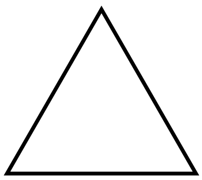
Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)
Il sera tenu compte de la présenattion de la copie, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

Exercice 1 (5 *points*)**.**

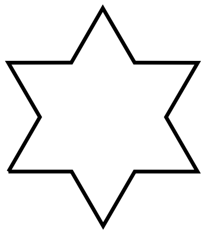
Peut-on trouver un domaine dont l'aire est inférieure à 2 et dont la frontière est une ligne polygonale de longueur infiniment grande ?

Soit $\mathcal{C}_0$ un triangle équilatéral dont la longueur du côté est 1.
On partage chaque côté en trois segments de même longueur.
Sur le segment central on construit, vers l'extérieur de $\mathcal{C}_0$, un triangle équilatéral et on supprime ce segment central. On obtient un polygone $\mathcal{C}_1$.
On peut réitérer le processus infiniment.

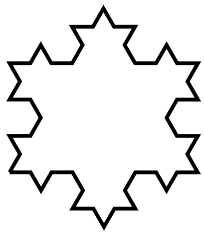
$\mathcal{C}_0$



$\mathcal{C}_1$



$\mathcal{C}_2$



$\mathcal{C}_n$ est le polygone obtenu à la n^{ieme} étape.
Pour le polygone $\mathcal{C}_n$, on note :

- x_n le nombre de ses côtés,
- l_n la longueur de chaque côté,
- P_n son périmètre
- A_n son aire.

On a : $x_0 = 3$, $l_0 = 1$, $P_0 = 3$, $A_0 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

1. Calculer x_1, l_1, P_1, A_1 et x_2, l_2, P_2 A_2. 1.5 *pts*

2. a. Exprimer x_{n+1} en fonction de x_n.
En déduire l"expression de x_n en fonction de n. $0.25 + 0.25\,pt$

b. Exprimer l_{n+1} en fonction de l_n.
En déduire l"expression de l_n en fonction de n. $0.25 + 0.25\,pt$

c. Exprimer P_n en fonction de n. Calculer la limite de la suite (P_n). $0.25 + 0.25\,pt$

3. Démontrer que : $A_{n+1} = A_n + \dfrac{\sqrt{3}}{12}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n$.

En déduire que : $\forall\, n \geq 1 \quad A_n = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{3\sqrt{3}}{20} \times \left[1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right]$ $(0,5+1)\,pts$

4. Trouver $\lim\limits_{x \to +\infty} A_n$. $0,25\,pt$

5. Répondre à la question posée au début de l'exercice. $0,25\,pt$

PROBLEME ($15\,points$)**.**

Dans le plan orienté $\mathscr{P}$, on considère trois points non alignés A, B et C tels que la mesure principale β de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right)$ appartient à $]0\ ,\ \pi[$.
Soit l"application f de $\mathscr{P}$ dans $\mathbb{R}$, qui à un point M du plan associe le réel :

$$f(M) = MA + MB + MC$$

On propose de démontrer que f admet un minimum qui est atteint en un seul point.
(C'est-à-dire qu'il existe un unique point T tel que $f(T) \leq f(M)$ pour tout point M de $\mathscr{P}$.)

Partie A

Soit M et N deux points distincts du plan et I le milieu de $[MN]$.

1. a. Montrer que pour tout point P du plan distinct de M et N, on a :

$$4IP^2 = MP^2 + NP^2 + 2MP \times NP \cos\left(\widehat{MPN}\right)$$

. $0.5\,pt$

b. En déduire que pour tout point P du plan

$$IP \leq \frac{1}{2}(MP + NP)$$

A quelle condition a-t-on l'égalité ? $0.5 + 0.5\,pt$

c. Montrer que $f(I) < \dfrac{1}{2}(f(M) + f(N))$ $1\,pt$

d. En déduire que si f admet un minimum, alors il est atteint un seul point. $0.5\,pt$

Partie B

Dans cette partie ABC est un triangle isocèle en A et H le milieu de $[BC]$.
On note $a = BC$ et $h = AH$

1. Soit M un point du plan , n'appartenant pas à (AH) et M_0 son projeté orthogonal sur la droite (AH).

a. Montrer que le symétrique B_0 de B par rapport à M_0 est le symétrique de C par rapport à (MM_0). $0.5\,pt$

b. Démontrer que :

$$M_0B + M_0C \leq MB + MC \quad \text{puis que} \quad f(M_0) \leq f(M)$$

$0.5 + 0.5\,pt$

c. Démontrer que si $M_0 \notin [AH]$ alors $f(A) < f(M_0)$ $0.5\,pt$

On en déduit que si f admet un minimum en un point, ce point appartient à $[AH]$.

2. Soit M un point de $[AH)$ et φ la mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BM}\right)$ tel que $\varphi \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

a. Démontrer que :

$$-\frac{\pi}{2} < \varphi \leq \beta < \frac{\pi}{2} \quad \text{et que} \quad f(M) = h + \frac{a}{\cos\varphi} - \frac{a\tan\varphi}{2}$$

$0.5 + 1\,pt$

b.

Soit la fonction : $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$

$$x \longmapsto g(x) = h + \frac{a}{\cos x} - \frac{a\tan x}{2}$$

Etudier les variations de g et dresser son tableau de variations. $1.5\,pt$

c. En déduire que f admet un minimum et préciser le point T qui réalise ce minimum.
(On distinguera le cas $\beta \leq \frac{\pi}{6}$ et le cas $\beta > \frac{\pi}{6}$). $1\,pt$

Partie C

Dans cette partie ABC est un triangle tel que l'angle $\widehat{BAC}$ a une mesure appartenant à l'intervalle $\left[\frac{2\pi}{3}, \pi\right[$.

Rappel : $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} \leq ||\overrightarrow{u}|| \times ||\overrightarrow{v}||$

1. a.
Montrer que pour tous points M, N, P, on a :

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} \leq NP\,(MP - NP)$$

$0.25\,pt$

b. En déduire que : $f(M) - f(A) \geq MA\left[1 - \left\|\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}\right\|\right]$ $0.5\,pt$

2. Montrer que : $\left\|\frac{1}{AB}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{AC}\overrightarrow{AC}\right\| \leq 1$ $0.5\,pt$

3. Que peut-on en déduire de **1.b** et **2.** ? $0.25\,pt$

Partie D

Dans cette partie ABC est un triangle dont les angles ont des mesures strictement inférieures à $\frac{2\pi}{3}$.
On construit à l'extérieur du triangle ABC, les traingles équilatéraux ABC', BCA' , ACB'.

1. a. Montrer que A' est à l'intérieur du secteur angulaire $\widehat{BAC}$. $1\,pt$
(De même on a B' est à l'intérieur du secteur angulaire $\widehat{ABC}$).

b. Démontrer que les droites (AA') et (BB') sont sécantes en un point T appartenant à l'intérieur du triangle ABC. $0.25\,pt$

2. On désigne par R la rotation de centre C et d'angle de mesure $-\frac{\pi}{3}$.

a. Déterminer R(A) et R(A'). En déduire que $\left(\overrightarrow{TA}, \overrightarrow{TB}\right) = \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ $0.5 + 0.5\,pt$

b. Soit T' l'image de T par R. Montrer que T' appartient à (BB'). $0.25\,pt$

En déduire que : $\left(\overrightarrow{TB},\overrightarrow{TC}\right) = \left(\overrightarrow{TC},\overrightarrow{TA}\right) = \dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$ $0.5\,pt$

c. Montrer que $\overrightarrow{u} = \dfrac{1}{TA}\overrightarrow{TA} + \dfrac{1}{TB}\overrightarrow{TB} + \dfrac{1}{TC}\overrightarrow{TC} = \overrightarrow{0}$ en calculant $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{u}$ $0.25\,pt$

3. En utilisant **C 1.a** et **D 2.c**, démontrer que pour tout point M du plan, on a : $f(M) \geq f(T)$ $0.5\,pt$

4. En déduire que les droites (AA'), (BB'), (CC') sont concourantes en un point qui réalise le minimun de f et démontrer que ce minimum est égal à BB'. $0.25 + 0.5\,pt$