UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

16 G 18 Bis B01
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du $2^{\text{ème}}$ groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n⁰ 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (5 *points*).

1. Calculer C_5^3, C_6^2 et C_{10}^4.
Montrer que la proposition :
« $\forall n, p \in \mathbb{N}^*$ et $p < n, C_n^p$ est un multiple de n. » est fausse. $3 \times 0.25 + 0.75$ *pts*
Dans la suite, n et p deux entiers naturels tels que $0 < p < n$.

2. Démontrer que si n et p sont premiers entre eux, alors C_n^p est un multiple de n. (On pourra utiliser la relation : $C_n^p = \frac{n}{p} C_{n-1}^{p-1}$).
Prouver que la réciproque est fausse. $1 + 0.5$ *pt*

3. Démontrer que si n est premier, alors pour tout couple d'entiers (a, b) le nombre $(a+b)^n - (a^n + b^n)$ est un multiple de n. 1.5 *pt*

Exercice 2 (5 *points*).

Soit n un entier naturel. Pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, on note

$$f_n(x) = \tan x + \frac{1}{2}\tan\frac{x}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n} \text{ et on pose } I_n = \int_{\pi/6}^{\pi/3} f_n(t)\, dt.$$

1. a. Démontrer que, pour tout réel x différent de $k\frac{\pi}{2}$ avec $k \in \mathbb{Z}$, $\frac{1}{\tan x} - \frac{2}{\tan 2x} = \tan x$. 1 *pt*

b. En déduire que $f_n(x) = -2\frac{\cos 2x}{\sin 2x} + \frac{1}{2^n}\frac{\cos(x/2^n)}{\sin(x/2^n)}$. 1 *pt*

2. Montrer que $I_n = \ln\left(2\cos\frac{\pi}{6 \times 2^n}\right)$. 2 *pts*

3. Calculer $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} I_n$. 1 *pt*

Exercice 3 (5 *points*).

Le plan P est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, unité graphique 1 cm. On considère la conique C d'équation : $9x^2 - 4y^2 - 18x - 8y - 31 = 0$.

1. Montrer que C est une hyperbole dont on déterminera le centre. 1.5 *pt*

2. Déterminer les éléments géométriques caractéristiques de C. (foyers, sommets, directrices, excentricité, asymptotes). 2.5 *pts*

3. Tracer C. 1 *pt*

Exercice 4 (5 *points*).

Soit f une isométrie plane laissant invariant un seul point A. Soit O un point distinct de A d'image O' par f. On note Δ la médiatrice du segment $[OO']$ et S_Δ la réflexion d'axe Δ.

1. Déterminer $f \circ S_\Delta(O')$ et $f \circ S_\Delta(A)$. 2×1 *pts*

2. Démontrer que $f \circ S_\Delta$ n'est pas l'application identique du plan. 1 *pt*

3. a. Donner la nature et les éléments géométriques caractéristiques de $f \circ S_\Delta$. 1 *pt*

b. En déduire la nature de f. 1 *pt*