UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal: 628 05 59
Téléfax (221) 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

09 G 18bis AR
Durée: 4 heures
Séries : S1-S3 - Coeff. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1.

1. Dans l'espace, on donne deux points A et B distincts.

a) Montrer que toute rotation R de l'espace transformant A en B a son axe (D) inclus dans le plan médiateur de $[AB]$. 1 **pt**

b) Réciproquement, soit (D) une droite du plan médiateur de $[AB]$. Montrer qu'il existe une rotation et une seule d'axe (D) transformant A en B. On pourra introduire le projeté orthogonal K de A sur (D). 1 **pt**

2. Soit $OABC$ un tétraèdre régulier dont tous les côtés ont la même longueur c'est à dire

$$OA = OB = OC = BC = AB = AC.$$

a) Montrer qu'il existe une rotation R_1 et une seule d'axe (OC) transformant A en B. $0,5$ **pt**

b) Montrer que le projeté orthogonal K de A sur (OC) est le milieu de $[OC]$.

En déduire que $KA = AB\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. $0,25 + 0,25 = 0,5$ **pt**

c) Déterminer le cosinus de l'angle de la rotation R_1 1 **pt**

EXERCICE 2.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat :

"Si p est un nombre premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p."

1. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29. $0,5$ **pt**

2. Soient a et n deux entiers naturels non nuls.
Démontrer que

$$(a+1)^n \equiv 1^n \; [a].$$

En déduire que $4^n \equiv 1 \; [3]$. $0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

3. Soient a et n deux entiers naturels non nuls.
Démontrer que

$$(a-1)^{2n} \equiv (-1)^{2n} \; [a].$$

En déduire que $4^{4n} \equiv 1 \; [17]$ et $4^{2n} \equiv 1 \; [5]$. $0,5 + 0,5 + 0,5 = 1,5$ **pt**

4. A l'aide des questions précédentes, déterminer 4 diviseurs premiers de $4^{28} - 1$. 1 **pt**

PROBLEME.

Le plan euclidien (P) est muni d'un repère orthonormé $\mathcal{R} = (O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$

On appelle f_a la fonction numérique de la variable réelle x définie par :

$$f_a(x) = x + 1 + \frac{a}{2} \ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right|,$$

où a est un réel non nul.
On note C_a la courbe représentative de f_a dans le repère $\mathcal{R}$ (unité graphique 1 cm).

Partie A: (5,5 pts)

1. Déterminer l'ensemble de définition D_{f_a} de f_a puis calculer les limites de f_a à ses bornes. $0,25 + 0,5 = 0,75$ **pt**

2. a) Prouver que toutes les courbes (C_a) passent par un point fixe I dont on déterminera les coordonnées. $0,5$ **pt**
b) Démontrer que le point I est centre de symétrie de toutes les courbes (C_a). $0,5$ **pt**

3. Déterminer les asymptotes de (C_a) puis étudier les positions relatives de (C_a) par rapport à son asymptote oblique (Δ). $0,25 + 0,25 + 0,5 = 1$ **pt**

4. Vérifier que f_a est dérivable dans D_{f_a} et calculer $f_a'(x)$ pour tout $x \in D_{f_a}$. $0,25 + 0,5 = 0,75$ **pt**

5. Soit g_a le trinôme défini pour tout x réel par :

$$g_a(x) = x^2 + a - 1$$

a) Résoudre, suivant les valeurs de a l'équation $g_a(x) = 0$. $0,5$ **pt**
b) Dans le cas où l'équation $g_a(x) = 0$ admet deux solutions réelles distinctes, on note x_1 la solution strictement positive.
Déterminer en fonction de a le signe de $1 - x_1$. $0,5$ **pt**
c) Etudier suivant les valeurs du paramètre réel a **strictement négatif**, les variations de f_a. $0,5$ **pt**

6. Tracer la courbe (C_{-1}) dans le repère $\mathcal{R}$. Les points d'inflexion et d'intersection avec l'axe des abscisses ne sont pas demandés. $0,5$ **pt**

Partie B: (3 pts)

Soit b un élément de $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et φ_b l'application du plan dans lui-même qui, à tout point $M(x, y)$ d'affixe z associe le point $M'(x', y')$ d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{1}{2}\Big[(1-b) + (1+b)i\Big]z + \frac{1}{2}\Big[(1+b) + (1+b)i\Big]\bar{z} + i(1+b)$$

où $\bar{z}$ est le conjugué de z.

1. a) Ecrire x' et y' en fonction de x, y et b. $0,5$ **pt**
b) Démontrer que l'ensemble des points invariants par φ_b est la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$. $0,5$ **pt**
c) Démontrer que si M n'est pas un point de (Δ) alors la droite (MM') est parallèle à une direction fixe. $0,5$ **pt**
d) Soit M_0 le point de (Δ) ayant même abscisse que M.
Exprimer $\overrightarrow{M_0M'}$ en fonction de $\overrightarrow{M_0M}$. $0,5$ **pt**

2. a) Démontrer que pour tout $b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ et tout $a \in \mathbb{R}^*$, $\varphi_b(C_a) = (C_{-ab})$. $0,5$ **pt**
b) En déduire une construction géométrique simple de C_{-3} point par point à partir de C_{-1} dans le repère $\mathcal{R}$. $0,5$ **pt**

Partie C: (3,5 pts)

Soit λ un réel tel que $0 < \lambda < 1$ et $A(\lambda)$ l'aire du domaine délimité par (C_a), (C_{a+2}) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$ dans le repère $\mathcal{R}$.

1. en utilisant une intégration par parties, calculer $A(\lambda)$ puis déterminer $\lim\limits_{\lambda \to 1} A(\lambda)$

$0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

2. On considère la fonction h définie pour tout élément de $[0,\ 1[$ par : $h(x) = -\ln\left(1 + \dfrac{2x}{1-x}\right)$ et la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de terme général $S_n = -\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{p=0}^{n-1} h\left(\frac{p}{n}\right)$.

a) Déterminer le sens de variation de h sur $[0,\ 1[$ puis prouver que pour tout entier naturel p vérifiant : $0 \leq p \leq n-2$ on a :

$$\frac{1}{n}h\left(\frac{p+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{p}{n}}^{\frac{p+1}{n}} h(x)\,dx \leq \frac{1}{n}h\left(\frac{p}{n}\right)$$

$0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

b) en déduire que :

$$S_n + \frac{1}{n}h\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq A\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n$$

$$\text{et } A\left(1 - \frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq A\left(1 - \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n}h\left(1 - \frac{1}{n}\right).$$

$0,5 + 0,5 = 1$ **pt**

c) Déduire de **1.** que $\lim\limits_{n\to+\infty} S(n) = \ln 4$ $0,5$ **pt**