15 T CGS 04 01
Durée : 06 heures
Toutes Séries Réunies

SESSION 2015

CLASSES DE TERMINALE

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques <u>non imprimantes</u> avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12.08.1988).
Il sera tenu compte pour l'appréciation des copies de la présentation, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

<u>PROBLEME 1</u> (12 points)

Le but de cet exercice est de montrer que dans un vrai triangle ABC (triangle non plat) du plan euclidien orienté Π, il existe une unique ellipse tangente en chacun des milieux des côtés du triangle. On l'appelle ellipse de Steiner de ABC.
Dans tout le problème $\mathcal{E}$ désignera une ellipse de foyers F_1 et F_2, de grand axe 2a.

Les deux propriétés des ellipses rappelées ci-dessous pourront être utilisées dans le problème.

Rappel 1 : $\mathcal{E} = \{M \in \prod \; ; \; MF_1 + MF_2 = 2a\}$

Rappel 2 : La droite (AB) est tangente à $\mathcal{E}$ en M $\in$]AB[si et seulement si $\widehat{F_1MA} = \widehat{BMF_2}$.

<u>PARTIE 1</u> : (Un théorème d'Appolonius) **(02, 25 points)**

Théorème 1 : Si A, B, C sont trois points distincts du plan tels que (AB) soit tangente à $\mathcal{E}$ en $M_1 \in$]AB[et (AC) soit tangente à $\mathcal{E}$ en $M_2 \in$]AC[alors $\widehat{M_1AF_1} = \widehat{F_2AM_2}$.

On désigne par H_1 le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à (AB) et par H_2 le symétrique orthogonal de F_1 par rapport à (AC).

1) Montrer que $M_1 \in]H_1F_2[$ et $M_2 \in]H_2F_2[$ **(0,25 + 0,25 pt)**
2) Montrer que $H_1F_2 = H_2F_2 = 2a$ **(0,5 pt)**
3) Montrer que (AF_2) est la médiatrice de $[H_1H_2]$ **(0,5 pt)**
4) En déduire une démonstration du <u>Théorème 1</u> **(0,75 pt)**

<u>PARTIE 2</u> : (Résultats d'unicité) **(01, 5 point)**

1) Montrer que si deux ellipses ont les mêmes foyers et un point commun alors elles sont confondues. **(0,75 pt)**
2) Montrer que si deux ellipses ont les mêmes foyers et une tangente commune alors elles sont confondues. **(0,75 pt)**

<u>PARTIE 3 :</u> (L'ellipse de Steiner) **(02 points)**

Soit ABC un vrai triangle et $A_0B_0C_0$ un triangle équilatéral du plan.

1) Montrer que dans le triangle équilatéral $A_0B_0C_0$, il existe une unique ellipse tangente aux trois côtés en leurs milieux. **(0,75 pt)**
2) Montrer qu'il existe une unique transformation affine du plan qui transforme le triangle ABC en le triangle $A_0B_0C_0$. **(0,5 pt)**
3) En déduire l'existence d'une ellipse tangente aux côtés de ABC en leurs milieux. **(0,5 pt)**
4) Montrer que cette ellipse est unique. **(0,25 pt)**

<u>PARTIE 4</u> : (Construction complexe des foyers de l'ellipse de Steiner) **(04 points)**

Dans cette partie, le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct.

On se propose de démontrer le théorème 2 suivant :

Théorème 2 : Soit A(a), B(b) et C(c) trois points distincts et non alignés du plan.
Si P(x) = (x – a) (x – b) (x – c) est un polynôme et w_1, w_2 les deux racines de P'(x), alors l'ellipse $\mathcal{E}$ de foyers $F_1(w_1)$ et $F_2(w_2)$ tangente en un côté du triangle ABC est tangente en tous les côtés en leurs milieux ($\mathcal{E}$ est donc l'ellipse de Steiner du triangle ABC).

1) Calculer 3 w_1w_2 et $3(w_1 + w_2)$ en fonction de a, b et c. **(0,5 + 0,5 pt)**
2) Montrer que $w_1 = w_2$ si et seulement si ABC est équilatéral de centre F_1. **(0,5 pt)**
3) Montrer que $\left(w_2 - \frac{a+b}{2}\right)\left(w_1 - \frac{a+b}{2}\right) = \frac{-1}{12}(a-b)^2$ · **(0,5 pt)**
4) En déduire que $\mathcal{E}$ est tangente à [AB] en son milieu C'. **(0,5 pt)**
5) Montrer que $3(a - w_1)(a - w_2) = (a - b)(a - c)$. **(0,5 pt)**
6) En déduire que $\mathcal{E}$ est tangente à [AC] en son milieu B'. **(0,5 pt)**
7) En déduire que $\mathcal{E}$ est l'ellipse de Steiner du triangle ABC. **(0,5 pt)**

PARTIE 5 : (Aire de l'ellipse de Steiner) **(02, 25 points)**

Le but de cette partie est de démontrer le théorème suivant :

Théorème 3 :

Soit ABC un triangle et $\mathcal{E}$ une ellipse contenue dans l'enveloppe convexe de ABC, alors $\frac{\text{aire }(\mathcal{E})}{\text{aire (ABC)}} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si $\mathcal{E}$ est l'ellipse de Steiner du triangle ABC.

1) Montrer le lemme suivant :
   Lemme :
   Soit ABC un triangle et (C) un cercle contenu dans l'enveloppe convexe de ABC, alors $\frac{\text{aire}(C)}{\text{aire}(ABC)} \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ avec égalité si et seulement si ABC est équilatéral et (C) est le cercle inscrit au triangle ABC. **(0,75 + 0,75 pt)**
2) En déduire une démonstration du théorème 2. **(0,75 pt)**

PROBLEME 2 **(08 points)**

1. Soit $(a_n)_{n \in IN}$ une suite croissante d'entiers telle que $a_0 \geq 2$. Démontrer que la suite $(S_n)_{n \in IN}$ définie par : $\forall$ n $\in$ IN, $S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{a_0 \dots a_k}$ est convergente de limite inférieure ou égale à $\frac{1}{a_0 - 1}$ ·
   Si x désigne la limite de la suite $(S_n)_{n \in IN}$, on dit que x admet un développement en série de Engel. On notera x = $[a_0, ..., a_n, ...]$. **(0,5 + 0,5 pt)**
2. Soit x $\in$]0, 1]. On définit deux suites $(x_n)_{n \in IN}$ et $(a_n)_{n \in IN}$ en posant x_0 = x et :
   $\forall$ n $\in$ IN, $a_n = 1 + E\left(\frac{1}{x_n}\right)$
   et $x_{n+1} = a_n x_n - 1$, où E désigne la fonction partie entière.
   2.1. Démontrer que les suites $(x_n)_{n \in IN}$ et $(a_n)_{n \in IN}$ sont bien définies. **(0,75 pt)**
   2.2. Démontrer que la suite $(x_n)_{n \in IN}$ est décroissante. **(0,75 pt)**
   2.3. Démontrer que la suite $(a_n)_{n \in IN}$ est croissante et que $a_0 \geq 2$. **(0,75 pt)**
   2.4. En reprenant les notations de la question 1, démontrer que : $\forall$ n $\in$ IN, x = $S_n + \frac{x_{n+1}}{a_0 \dots a_n}$
   En déduire que x admet un développement en série de Engel. **(0,75 + 0,5 pt)**
3. On suppose qu'il existe deux suites distinctes d'entiers $(a_n)_{n \in IN}$ et $(b_n)_{n \in IN}$ telles que $a_0 \geq 2$, $b_0 \geq 2$ et : $\forall$ n $\in$ IN, $[a_0, ..., a_n, ...] = [b_0, ... b_n, ...]$
   On pose $n_0 = \min\{n \in IN \mid a_n \neq b_n\}$.
   3.1. Démontrer que $[a_{n_0}, ..., a_n, \dots] = [b_{n_0}, \dots b_n, ...]$. **(0,5 pt)**
   3.2. Démontrer que si x = $[\alpha_0, ... \alpha_n, ...]$, alors $a_0 x - 1 \leq x$ et en déduire que $\alpha_0 = 1 + E\left(\frac{1}{x}\right)$ · **(0,5 + 0,5 pt)**
   3.3. En déduire l'unicité du développement en série de Engel d'un réel donné dans l'intervalle]0, 1]. **(0,75 pt)**
4. Déterminer le réel dont le développement en série de Engel est associé à :
   4.1. Une suite $(a_n)_{n \in IN}$ constante égale à C (C $\geq$ 2). **(0,5 pt)**
   4.2. La suite $(a_n)_{n \in IN}$ définie par : $\forall$ n $\in$ IN $a_n = n + 2$ **(0,75 pt)**
   (On donne $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} = e$).