UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 G 26 AR
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5 Coef 5

Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

Exercice 1 (4 points).

1. Soit Ω l'univers des possibles d'une expérience aléatoire donnée. Soient A et B des événements dans cet univers. Compléter les définitions et propriétés suivantes :
a. Dans le cas de l'équiprobabilité, la probabilité $p(A)$ de A est : $p(A)=$..... **0,5 pt**
b. Dans le cas de la non équiprobabilité, $p(A)$ est ..... **1 pt**
c. $p(A\cup B)=$.... **0,5 pt**
d. $p(\overline{B})=$.... **0,5 pt**

2. Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes non nuls et n un entier naturel. Compléter les propriétés suivantes :
a. $\arg(\frac{z_1}{z_2})=\ldots$ **0,5 pt**
b. $\arg(z^n)=\ldots$ **0,5 pt**

3. Répondre par vrai ou faux à ce qui suit en justifiant.
Pour tout $x\in\,]-\infty,-1[\,\cup\,]0,+\infty[$ on a : $\ln(\frac{x+1}{x})=\ln(x+1)-\ln x$. **0,5 pt**

Exercice 2 (3 points).

Une urne contient neuf boules, indiscernables au toucher, numérotées de 1 à 9. L'épreuve consiste à tirer au hasard et simultanément 3 boules dans l'urne et à les remettre dans l'urne après avoir noté les numéros tirés.

1. On procède à une épreuve.
a. Soit X la variable aléatoire définie par le nombre de chiffres pairs tirés. Déterminer la loi de probabilité de X. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles. **1 pt**
b. Calculer $p(X\leq 1)$. **0,5 pt**

2. On procède à 10 épreuves successives. Calculer la probabilité d'obtenir :
a. Au moins une fois un chiffre pair et deux chiffres impairs. **1 pt**
b. Cinq fois deux chiffres pairs et un chiffre impair. **0,5 pt**

Exercice 3 (3 points).

Soient les nombres complexes $z_1=\dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $z_2=2-2i$.

1. Mettre sous forme trigonométrique z_1, z_2 et $Z=\dfrac{z_1}{z_2}$. **0,75 pt**

2. En déduire que $\cos\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. **0,5 pt**

3. On considère l'équation d'inconnue réelle x :

$$(\sqrt{6}+\sqrt{2})\cos x+(\sqrt{6}-\sqrt{2})\sin x=2.$$

a. Résoudre cette équation dans $\mathbb{R}$. **1 pt**

b. Placer les points images des solutions de l'équation sur le cercle trigonométrique. **0,75 pt**

PROBLEME (10 points).

Partie A

On considère la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$g(x)=-\frac{1}{x+1}+\ln(x+1)-\ln x.$$

1. Calculer $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}\ln(1+\frac{1}{x})$, puis $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}g(x)$. **(0,25 + 0,25 pt)**

2. Etudier les variations de g. **1 pt**

3. En déduire que, pour tout nombre réel $x>0,\ g(x)>0$. **0,5 pt**

Partie B

On considère la fonction f définie par :

$$\begin{cases} f(0) &= 0 \\ f(x) &= x\left[\ln(x+1)-\ln x\right] \quad, \text{ si } x>0. \end{cases}$$

1. Etudier la continuité de f sur $\mathbb{R}_+$. **0,5 pt**

2. Etudier la dérivabilité de f en 0. Interpréter géométriquement le résultat. **(0,5 + 0,5 pt)**

3. Calculer $f'(x)$ pour $x>0$. Déterminer le signe de $f'(x)$. **(0,5 + 0,5 pt)**

4. Montrer que $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}f(x)=1$. **0,5 pt**

5. Dresser le tableau de variation de f. **0,5 pt**

6. Soit (Cf) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$, d'unité graphique 4 cm.

a. Soit T la tangente à (Cf) au point d'abscisse 1. Déterminer l'intersection de l'axe des ordonnées avec T. **0,5 pt**

b. Construire T et (Cf). **1 pt**

7. Soit α un réel strictement positif.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^{\alpha}\frac{x}{x+1}dx=\alpha-\ln(\alpha+1)$. **0,5 pt**

b. Calculer l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (Cf), l'axe des abscisses, les droites d'équations $x=1$ et $x=\alpha$. **0,5 pt**

Partie C

1. On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour $n\in\mathbb{N}^*$ par :
$u_n=(1+\frac{1}{n})^n$ et $v_n=\ln(u_n)$.

a. A l'aide de la partie **B** déterminer le sens de variations de v_n et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}v_n$. **(0,5 + 0,5) pt**

b. En déduire le sens de variations de u_n et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty}u_n$. **(0,5 + 0,5) pt**

FIN DU SUJET