CONCOURS GENERAL SENEGALAIS

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 1 CGS 02 01
Durée : 5 heures
Toutes séries réunies

CLASSES DE PREMIERE

MATHEMATIQUES

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^0 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)**

Il sera tenu compte de la présenattion de la copie, de la clarté et de la précision de l'argumentation.

PROBLEME 1 (8 *points*). Isométries planes et points invariants

On rappelle :

(1) Une application f d'un plan $\mathscr{P}$ vers lui-même est une isométrie si elle conserve les distances.

(2) Un point M de $\mathscr{P}$ est dit invariant par f si $f(\mathrm{M}) = \mathrm{M}$.

(3) Pour deux triangles ABC et DEF tels que $\mathrm{AB} = \mathrm{DE}$, $\mathrm{AC} = \mathrm{DF}$ et $\widehat{\mathrm{BAC}} = \widehat{\mathrm{EDF}}$, on a : $\mathrm{BC} = \mathrm{EF}$.

Partie A : Etude d'exemples usuels

Dans chacun des cas suivants :

— donner l'ensemble des points invariants de l'application considérée,

— prouver que l'application considérée est une isométrie.

(1) L' application t est une translation de vecteur $\vec{u}$ non nul. **(0.5+0.5)pt**

(2) L' application s est une symétrie orthogonale d'axe Δ. **(0.5+1)pt**

(3) L' application r est une rotation de centre Ω et d'angle θ non nul modulo 2π. **(0.5+1)pt**

Partie B : Ensemble des points invariants d'une isométrie

Soit f une isométrie différente de l'identité ; alors f possède un point non invariant K d'image K$'$. On a alors $\mathrm{K} \neq \mathrm{K}'$.

(1) (a) Prouver que tout point invariant M par f appartient à (d), la médiatrice du segment $[\mathrm{KK}']$. **0.5 pt**

(b) La réciproque est-elle vraie ? Justifier. **(0.25+0.25)pt**

(2) Que peut-on dire alors d'une isométrie ayant trois points invariants non alignés ? **1 pt**

Partie C : Isométries ayant au moins deux points invariants

Soit f une isométrie différente de l'identité ayant deux points invariants distincts I et J.

(1) Soit $\mathrm{M} \notin (\mathrm{IJ})$.

(a) Prouver que M n'est pas invariant. **0.25 pt**

(b) Montrer que M et $f(\mathrm{M})$ sont symétriques par rapport à (IJ). **0.25 pt**

(2) Soit $\mathrm{M} \in (\mathrm{IJ})$.
Prouver que M est invariant par f. **1 pt**

(3) En déduire la nature de f. **0.5 pt**

PROBLEME 2 (12 *points*)**.**

Partie A : Inégalités de réordonnement. Inégalité de Tchebychev (n=3)

Soient deux triplets de réels positifs (r, s, t) et (u, v, w) tels que $r \geq s \geq t$, $u \geq v \geq w$. On considère les sommes suivantes :

$$\mathbf{M = ru + sv + tw}$$

$$s_1 = ru + sw + tv$$

$$s_2 = rv + su + tw$$

$$s_3 = rv + sw + tu$$

$$s_4 = rw + su + tv$$

$$\mathbf{m = rw + sv + tu}.$$

(1) Montrer que $\mathrm{M} \geq s_1$. **0.5pt**

(2) Montrer que $s_1 \geq m$. *(On pourra utiliser* $w - v = w - u + u - v$*).* **1pt**

On a donc : $\mathrm{M} \geq s_1 \geq m$. Et on admet que : $\mathrm{M} \geq s_k \geq m$, pour $k = 2, 3, 4$.

Les inégalités $\mathrm{M} \geq s_k \geq m$, pour $k = 1, 2, 3, 4$, sont appelées **inégalités de réordonnement**.

(3) (a) Montrer que : $\mathrm{M} \geq \dfrac{\mathrm{M} + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + m}{6} \geq m$. **1pt**

(b) Factoriser $\mathrm{M} + s_1 + s_2 + s_3 + s_4 + m$. **0.5pt**

(c) En déduire que $\mathrm{M} \geq \dfrac{(r+s+t)(u+v+w)}{3} \geq m$. **0.5pt**

L' inégalité $\mathrm{M} \geq \dfrac{(r+s+t)(u+v+w)}{3} \geq m$ est appelée **inégalité de Tchebychev**.

Partie B : Applications

Application 1

On considère les fonctions f, g, h définies sur $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 4x^5 + 3x^2 + 2, \quad g(x) = 2x^5 + 3x^2 + 4 \quad \text{et} \quad h(x) = 3x^5 + 2x^2 + 4.$$

En utilisant des inégalités de réordonnement, comparer :

$f(x)$, $g(x)$ et $h(x)$ pour $x \in]0, 1[$, puis pour $x \in]1, +\infty[$. **(2 ×0.75)pt**

Application 2

On considère trois réels strictement positifs a, b et c tels que : $a \geq b \geq c$.

(1) Montrer que : $\dfrac{1}{b+c} \geq \dfrac{1}{a+c} \geq \dfrac{1}{a+b}$. **0.5pt**

(2) Calculer $\dfrac{b}{b+c} + \dfrac{c}{a+c} + \dfrac{a}{a+b} + \dfrac{c}{b+c} + \dfrac{a}{a+c} + \dfrac{b}{a+b}$. **0.5pt**

(3) En utilisant des inégalités de réordonnement, montrer que :

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}.$$

1pt

Application 3

On considère trois réels strictement positifs a, b et c tels que : $a \geq b \geq c$.

On a donc $a+b \geq a+c \geq b+c$.

(1) Montrer que : $\dfrac{ab}{a+b} \geq \dfrac{ac}{a+c} \geq \dfrac{bc}{b+c}$. **0.5pt**

(2) En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{a+c} + \frac{bc}{b+c} \leq \frac{3}{2} \times \frac{ab+ac+bc}{a+b+c}.$$

1.5pt

Application 4

On considère un triangle ABC dont tous les angles sont aigus.

Soit H l'orthocentre de ABC, I le centre du cercle inscrit dans ABC et r le rayon de ce cercle.

A$'$, B$'$ et C$'$ sont les pieds des hauteurs issues respectivement de A, B et C.

(1) En calculant de deux manières l'aire de ABC, montrer que

$$\mathrm{HA}' \times \mathrm{BC} + \mathrm{HB}' \times \mathrm{AC} + \mathrm{HC}' \times \mathrm{AB} = r \times (\mathrm{AB}+\mathrm{AC}+\mathrm{BC}).$$

0.75pt

(2) On suppose que AB $\geq$ AC $\geq$ BC.

(a) (i) En calculant $\cos\left(\widehat{\mathrm{BAA}'}\right)$, et $\cos\left(\widehat{\mathrm{CAA}'}\right)$, montrer que :
$mes(\widehat{\mathrm{BAA}'}) \geq mes(\widehat{\mathrm{CAA}'})$. **0.75pt**

(ii) En déduire que HC$'$ $\geq$ HB$'$. **0.5pt**

On admet : HB$'$ $\geq$ HA$'$. Alors on a : HC$'$ $\geq$ HB$'$ $\geq$ HA$'$.

(b) En utilisant l'inégalité de Tchebychev, montrer que :

$$\mathrm{HC}' + \mathrm{HB}' + \mathrm{HA}' \leq 3r.$$

1pt

Fin du sujet