UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

09 G 26 A R
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

□□□□□

OFFICE DU BACCALAUREAT

Téléfax (221) 825.24.58 - Tél. : 824.95.92 – 824.65.81

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrées unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettent d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdits. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE I (04 points)

1 / Dans ₵, on considère l'équation (E) définie par :

$$(E) : z^3 - i z + 1 - i = 0$$

a) Déterminer la solution imaginaire pure de l'équation (E) notée Z_0. **(0,5 point)**

b) Déterminer la solution réelle de (E) notée z_1 et achever la résolution de (E). **(0,75 point)**

(On appellera z_2 la troisième solution)

2 / Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives –i ; -1 et 1 + i.

a) Déterminer l'affixe du point G isobarycentre de A, B et C. **(0,5 point)**

b) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{-\pi}{2}$. **(0,5 point)**

Déterminer l'écriture complexe de R.
Soient A', B' et C' les images respectives de A, B et C par r. Déterminer $z_{A'}$, $z_{B'}$ et $z_{C'}$. **(0,75 point)**

c) Déterminer l'image de la droite (AB) par R. Justifier. **(01 point)**

EXERCICE II (05 points)

Le tableau suivant indique les quantités de riz (en millions de tonnes) importées par un pays pendant 7 années successives.

Rang de l'année 1	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
Quantités importées X_i	**615**	**597**	**580**	**510**	**500**	**498**	**487**

Un riziculteur propose une politique agricole dénommée **GOANAR** (Grande offensive Agricole pour la Nourriture et l'Abondance en Riz) dont l'objectif est de remplacer progressivement les importations par du riz local de qualité.
Sa politique consiste à produire chaque année une quantité Y_i, en millions de tonnes proportionnelle au rang de l'année selon la relation : $Yi = 31 i$

1. Dresser le tableau de la série statistique (X_i, Y_i). **(0,5 point)**

2) a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre les deux variables X et Y. **(02 points)**

b) Interpréter le résultat du 2a). **(0,5 point)**

3) Donner une équation de la droite de régression de Y en X. **(01 point)**

4) On suppose que cette évolution se maintient, estimer le rang de l'année où les importations sont égales à la production. **(0,5 point)**

5) A partir de quelle année, l'importation représente les 10 % de la production, sachant que la première année correspond à 2008. **(0,5 point)**

PROBLEME **(11 points)**

I / Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$

par : $g(x) = \dfrac{-2}{1+x^2} + \ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

1) Etudier les variations de g et dresser le tableau de variations. **(01,5 point)**
2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $0{,}5 < \alpha < 0{,}6$. **(01 point)**
3) En déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$. **(0,5 point)**

II / Soit la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right), & \text{si } x>0 \\ -(x+1)e^{-\frac{1}{x}}, & \text{si } x<0 \\ 0, & \text{si } x=0 \end{cases}$$

1) Déterminer l'ensemble de définition de f et calculer les limites aux bornes de celui –ci. **(0,25) + (0,5 point)**

2) a) Etudier la continuité de f en 0, puis la dérivabilité de f en 0 à droite. **(0,5) + (0,25 point)**

b) Interpréter graphiquement les résultats du 2a). **(0,5 point)**

3) Etudier les branches infinies de la courbe de f au voisinage de $-\infty$. **(0,5 point)**

4) a) Montrer que pour tout x appartenant à $]0, +\infty[$, $f'(x) = g(x)$. **(0,5 point)**

b) Etudier le sens de variation de f et dresser le tableau de variations de f. **(01,5 point)**

c) Etablir que $f(\alpha) = \dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2}$. **(0,5 point)**

5) Tracer $(\mathscr{C})$ la courbe de f dans un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, **(01,5 point)**
(On prendra $\alpha = 0{,}5$; unité = 2cm)
On précisera l'équation de la tangente au point d'abscisse -1. **(0,25 point)**

6) Soit $I =]-\infty, 0[$.
Montrer que f est une bijection de I sur un intervalle J à préciser. **(0,25 point)**

7) Déterminer l'aire $A(\lambda)$ du Domaine compris entre la courbe $(\mathscr{C})$ l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = \lambda$ ($\lambda > 1$). On procédera par intégration par parties. **(01 point)**