

**MATHEMATIQUES**

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (04 Points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient 5 boules rouges et 3 boules blanches, l'urne U_2 contient 6 boules rouges et 5 boules blanches. Les boules sont indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de U_1 et on la met dans U_2 .

On tire ensuite une boule de U_2 .

On note R_1 l'événement : « on a tiré une boule rouge de U_1 » ; R_2 l'événement « on a tiré une boule rouge de U_2 ».

a) Déterminer $p(R_1)$ et $p(R_2/R_1)$.

b) En déduire la probabilité d'avoir tiré une boule rouge de U_1 et une boule rouge de U_2 .

c) Calculer la probabilité d'avoir tiré une boule rouge et une boule blanche.

EXERCICE 2 (05 Points)

Soit (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout entier naturel n par :

$$U_0 = 1 ; U_{n+1} = \frac{2}{3}U_n - 1 \text{ et } V_n = U_n + 3$$

1/ Montrer que (V_n) est une suite géométrique.

2/ Calculer V_n en fonction n .

3/ a) Calculer la somme $S_n = \sum_{k=0}^n V_k = V_0 + V_1 + \dots + V_n$ en fonction de n .

b) En déduire la somme $S'_n = \sum_{k=0}^n U_k = U_0 + U_1 + \dots + U_n$

c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} S'_n$

EXERCICE 3 (05 Points)

1/ Déterminer les fonctions définies sur \mathbb{R} , solutions de l'équation différentielle $(E_1) : y'' - 2y' + y = 0$

2/ On considère l'équation différentielle $(E_2) : y'' - 2y' + y = 2x + 3$

a) Vérifier que la fonction p définie sur \mathbb{R} par : $p(x) = 2x + 7$ est solution de (E_2)

b) Démontrer qu'une fonction g est solution de (E_2) si et seulement si $g - p$ est solution de (E_1)

- c) Déduire de 1) et 2b) les solutions de (E_2)
 d) Déterminer la solution de (E_2) qui vérifie $g(0)=1$ et $g'(0) = 2$

EXERCICE 4 (06 Points)

Le tableau de variations ci-dessous est celui d'une fonction f continue sur son ensemble de définition avec $f'(1) = 0$ et $f'(2) = -1$

x	$-\infty$	-3	-1	1	2	3	$+\infty$		
$f'(x)$	-	0	+	+	0	-1	-	0	+
f	-1		$+\infty$		4		2		$+\infty$

La courbe (\mathcal{C}) de f coupe l'axe des abscisses en $A(-2,0)$ et $B(-\frac{1}{2},0)$ et l'axe des ordonnées au point $C(0,2)$

La droite (D) d'équation $y = x-3$ est asymptote oblique en $+\infty$ et est en dessous de (\mathcal{C}) sur $[0, +\infty[$

- 1/ a) Donner l'ensemble de définition de f .
 b) Donner l'ensemble de dérivabilité de f .
- 2/ Donner en justifiant toutes les asymptotes de la courbe.
- 3/ Donner l'équation de chacune des demi tangentes à la courbe au point d'abscisse 1.
- 4/ Tracer (D) et donner une allure générale de la courbe dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ unité 1cm.
 On mettra en évidence toutes les informations contenues dans le tableau de variations.
- 5) a) La restriction g de f à l'intervalle $[3, +\infty[$ est-elle bijective ? Justifier la réponse.
 b) g^{-1} est-elle dérivable en 2 ? Justifier la réponse ?
- 6) En utilisant la représentation graphique, déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles l'équation $f(x) = m$ admet exactement quatre solutions distinctes réelles.

B A R E M E

EXERCICE 1

(04 points)

- a) : 01 + 01 point
 b) : 0,5 point
 c) : 01,5 point

EXERCICE 2

(05 points)

- 1) : 01 point
 2) : 01 point
 3) a) : 01 point
 b) : 01 point
 c) : 0,5 + 0,5 point

EXERCICE 3

(05 points)

- 1) : 01 point
 2) a) : 01 point
 b) : 01 point
 c) : 01 point
 d) : 01 point

EXERCICE 4

(06 points)

- 1) a) : 0,5 point
 b) : 0,5 point
 2) : 01 point
 3) : 01 point
 4) : 01,5 point
 5) a) : 0,5 point
 b) : 0,5 point
 6) : 0,5 point