CORRIGE

UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR 1/

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

01 G 18 Bis B18
Durée : 2 heures
Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du $2^{\text{ème}}$ groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.
Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.
Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

CORRIGE

Exercice 1. Notons H l'épreuve « Réussir le saut de la haie, » de probabilité $h = 0.7$, R l'épreuve « Réussir le saut du ruisseau » de probabilité $r = 0.4$, et G l'épreuve « Réussir le grimper de la corde » de probabilité $g = 0.4$.

$A = \overline{R}$, donc $p(A) = 1 - p(R) = 1 - r = 0,6$

B est l'intersection des trois événements *indépendants* : H, R et $\overline{G}$; donc

$$p(B) = p(H \cap R \cap \overline{G}) = p(H)p(R)p(\overline{G}) = hr(1-g) = 0.7 \times 0.4 \times 0.6 = 0.168.$$

C est la réunion *disjointe* des événements

$$C_1 = H \cap R \cap \overline{G}, \quad C_2 = H \cap \overline{R} \cap G \text{ et } C_3 = \overline{H} \cap R \cap G$$

Puisque les événements H, R et G sont *indépendants*,

$$p(C_1) = hr(1-g), p(C_2) = h(1-r)g \text{ et } p(C_3) = (1-h)rg.$$

Donc $p(C) = p(C_1) + p(C_2) + p(C_3) = hr + hg + rg - 3hrg = 0,384$

D est la réunion *disjointe* de C et de $H \cap R \cap G$ Puisque les événements H, R et G sont *indépendants*,

$$p(H \cap R \cap G) = hrg.$$

Donc $p(D) = p(C) + p(H \cap R \cap G) = hr + hc + rc - 2hrc = 0,496$

Exercice 2.

1. L'équation $zz' = az' + bz$ est équivalente à $z'(z-a) = bz$ c'est à dire, puisque $z \neq a$, $z' = \dfrac{bz}{z-a}$.

2. Un point $M(z)$ est invariant par f si et seulement si $z' = z$ c'est à dire $z^2 = az + bz$ ou encore $z(z - a - b) = 0$. On trouve $z = 0$ ou $z = a + b = 1 - 2i$.

L'ensemble des points invariants par f est donc $\{O, C\}$, C étant le point d'affixe $a+b = 1-2i$.

3. a. On a $|b| = 1$ et $\arg b = -\dfrac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned} z' &= \frac{bz}{z-a} \\ &\Leftrightarrow |z'| = \left|\frac{bz}{z-a}\right| \text{ et } \arg z' = \arg \frac{bz}{z-a}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow |z'| = \frac{|b|\,|z|}{|z-a|} \text{ et } \arg z' = \arg b + \arg \frac{z}{z-a}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow OM' = \frac{OM}{AM} \text{ et } \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM'}\right) = -\frac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{OM}\right) [2\pi] \end{aligned}$$

b. Si $M(z)$ est tel que $|z'| = 2$, la relation $zz' = az' + bz$ donne $z(z' - b) = az'$ autrement dit $z = \dfrac{az'}{z' - b}$. La relation du **3.a.** montrer ensuite que $\dfrac{OM}{AM} = 2$, autrement dit $OM = 2AM$.

On utilise ensuite la technique habituelle pour déterminer l'ensemble des points M tels que $OM = 2AM$: Si $G = \text{bar}\,\{(O,1),(A,2)\}$ et $H = \text{bar}\,\{(O,1),(A,-2)\}$, alors cet ensemble est le cercle de diamètre $[GH]$.

Réciproquement, si $M(z)$ appartient à $\mathcal{E}$, alors $\dfrac{OM}{AM} = 2$. Donc $OM' = 2$ et $|z'| = 2$.

L'ensemble $(\mathcal{E})$ des points $M(z)$ tels que $|z'| = 2$ est le cercle de diamètre $[GH]$.

c. Notons Δ la médiatrice de $[OA]$, $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1 et soit M un point du plan.

$$M \in \Delta \Leftrightarrow OM = AM \Leftrightarrow \frac{OM}{AM} = 1 \Leftrightarrow OM' = 1 \Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}$$

L'image par f de la médiatrice de $[OA]$ est le cercle de centre O et de rayon 1.

d. Notons $t_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u}$ (dont l' affixe est 1.) Alors $M'' = t_{\vec{u}} \circ f(M)$.

D'après la question précédente, $f(M)$ décrit le cercle de centre O et de rayon 1. Par conséquent, M'' décrit l'image de ce cercle par $t_{\vec{u}}$ c'est à dire le cercle de centre $t_{\vec{u}}(O)$ (point d'affixe 1) et de rayon 1.

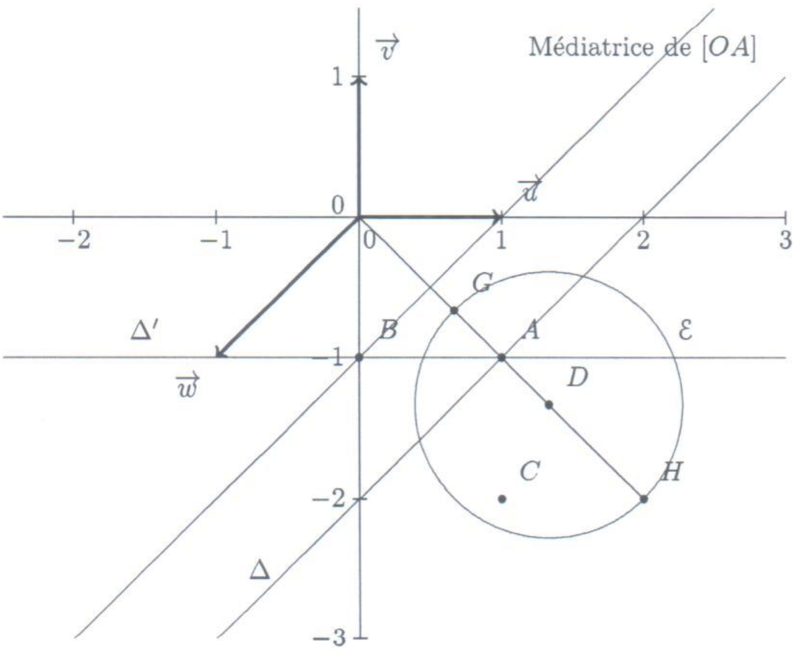
4. a.

$$z' = \frac{bz}{z-a} \Leftrightarrow z'(z-a) = bz \Leftrightarrow z'(z-a) = b(z-a) + ab \Leftrightarrow (z'-b)(z-a) = ab$$

b. Un point $M'(z')$ appartient à Δ' s'il existe un réel $\lambda \neq 0$ tel que $\overrightarrow{BM'} = \lambda\overrightarrow{BA}$ c'est à dire $z' - b = \lambda$.

La relation du **4.a** montre alors que $\lambda(z-a) = ab$ puis $z - a = \dfrac{1}{\lambda}ab$ ou encore $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{\lambda}\vec{w}$, $\vec{w}$ étant le vecteur d'affixe $ab = -1 - i$.

Δ est donc la droite passant par A et de vecteur directeur $\vec{w}$, privée du point A.



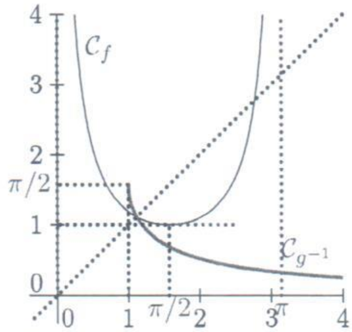
Exercice 3. Soit f la fonction définie sur $]0, \pi[$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sin x}$.

1. La fonction f est définie et continue sur $D_f =]0, \pi[$. Elle tend vers $+\infty$ en 0^+ et π^- car $\lim\limits_{0^+} \sin = \lim\limits_{\pi^-} \sin = 0^+$. La fonction f est dérivable dans D_f et

$$\forall x \in D_f, f'(x) = \frac{-\sin'(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}$$

Voici le tableau de variation de f et son graphe.

x	0		$\pi/2$		π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$



2. La fonction f est continue et strictement décroissante dans l'intervalle $\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]$; g, sa restriction à cet intervalle est donc une bijection de cet intervalle sur $f\left(\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right]\right) = [1, +\infty[$. g possède donc une bijection réciproque g^{-1} définie sur $[1, +\infty[$

3. a. $y = g^{-1}(x)$ signifie $x = f(y) = \dfrac{1}{\sin y}$ ou $\sin y = \dfrac{1}{x}$ et comme $\cos y > 0$, on en déduit, $\cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y} = \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{x}$.

b. On en déduit que pour tout x de $]1, +\infty[$,

$$(g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{f'(y)} = -\frac{\sin^2 y}{\cos y} = -\frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}$$

4. En se servant des résultats précédents, et en posant $I = \displaystyle\int_{2\sqrt{3}/3}^{\sqrt{2}} \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}}\, dx$, on peut écrire $I = -\displaystyle\int_{2\sqrt{3}/3}^{\sqrt{2}} (g^{-1})'(x)\, dx = -\left[g^{-1}(x)\right]_{2\sqrt{3}/3}^{\sqrt{2}} = -g^{-1}(\sqrt{2}) + g^{-1}(2\sqrt{3}/3) = -\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{\pi}{12}$

Exercice 4.

1. Un entier relatif impair s'écrit $4n+1$ ou $4n+3, n \in \mathbb{Z}$. Le carré d'un tel entier est alors de la forme $8n^2 + 8n + 1$ ou $8n^2 + 24n + 9$; ce carré est donc $\equiv 1[8]$.

2. Si un entier relatif M est tel que $M^2 \equiv 1[8]$, alors il existe un entier m tel que $M^2 = 8m+1$. M^2 est donc est impair ; par conséquent M était impair.

3. Soit k un entier fixé.
- Si k est < 0, $8k+1$ est < 0 et l'équation n'a pas de solution.
- Si $k \geq 0$, pour que l'équation ait une solution, il faut d'après ce qui précède que x soit impair c'est à dire qu'il existe un entier p tel que $x = 2p+1$. L'équation devient alors $p^2 + p = 2k$; Il faut donc que k soit de la forme $\dfrac{1}{2}p(p+1), p \in \mathbb{N}$.

Réciproquement, si k est de cette forme, alors $(2p+1)^2 = 4(p^2+p)+1 = 8k+1$; donc l'entier $2p+1$ et son opposé sont les seules solutions de l'équation $x^2 = 8k+1$.

En résumé, pour que l'équation $x^2 = 8k+1$ ait des solutions dans $\mathbb{Z}$, il faut et il suffit qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $k = \dfrac{1}{2}p(p+1)$ et l'ensemble des solutions est alors $\{2p+1, -2p-1\}$

4. Soit $M(x, y)$ un point de $(\mathcal{C})$ à coordonnées entières. On doit avoir $x^2 = 8y+1$.

D'après la question précédente, x est de la forme $2p+1$ et y de la forme $\dfrac{1}{2}p(p+1)$. La contrainte supplémentaire « le point M est à l'intérieur du carré $OABC$ » se traduit par $2p+1$ et $\dfrac{1}{2}p(p+1)$ appartiennent à $[0, 5]$ c'est à dire $p = 1$.

On trouve alors le point $M_1(3, 1)$.