



UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR



OFFICE DU BACCALAUREAT

BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal

Serveur Vocal : 628 05 59

Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

17 G 18 Bis A 01

4 heures

Série S1-S3 Coef 8

Epreuve du 1<sup>er</sup> groupeM A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (CF. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

## CORRECTION

## Exercice 1.

1.  $A(0, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 0)$ ,  $C(1, 1, 0)$ ,  $D(0, 1, 0)$ ,  $E(0, 0, 1)$ ,  $F(1, 1, 0)$ ,  $G(1, 1, 1)$ ,  $H(1, 0, 1)$ a. Le vecteur  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $(-1, 1, 0)$  c'est à dire  $\overrightarrow{BD} = -\vec{i} + \vec{j}$ Le vecteur  $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG} - \overrightarrow{AB}$  a pour coordonnées  $(0, 1, 1)$  c'est à dire  $\overrightarrow{BG} = \vec{j} + \vec{k}$ Donc  $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG} = (-\vec{i} + \vec{j}) \wedge (\vec{j} + \vec{k}) = -\vec{k} + \vec{j} + \vec{i}$ . Les coordonnées de  $\overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$  sont  $(1, 1, -1)$ .b. Le plan  $(BGD)$  peut être défini comme le plan passant par  $B$  et de vecteur normal  $\vec{n} = \overrightarrow{BD} \wedge \overrightarrow{BG}$ . Un point  $P$  de coordonnées  $(x, z, y)$  appartient donc à ce plan si et seulement si  $\vec{n} \cdot \overrightarrow{BP} = 0$  c'est à dire  $1(x - 1) + 1(y - 0) - 1(z - 0) = 0$  ou  $x + y - z - 1 = 0$ . Cette dernière équation est donc une équation cartésienne de  $(BGD)$ .c. On a  $\overrightarrow{EC} = \vec{n}$  qui est normal au plan  $(BGD)$ , donc la droite  $(EC)$  est bien perpendiculaire au plan  $(BGD)$ .2. La distance du point  $C$  au plan  $(BGE)$  est  $r = \frac{|x_C + y_C - z_C - 1|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ . Un point  $P$  de coordonnées  $(x, z, y)$  appartient donc à la sphère  $S$  si et seulement si  $CP^2 = r^2$  c'est à dire  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2 = \frac{1}{3}$  ou  $(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + z^2 = \frac{1}{3}$ . Cette dernière équation est donc une équation cartésienne de  $S$ .3. A tout  $\alpha$  appartenant à l'intervalle  $[0, 1]$  on associe le point  $M$  de coordonnées  $(\alpha, \alpha, 1 - \alpha)$ .a. Pour que  $M$  soit un point du segment  $[EC]$ , il faut et il suffit qu'il soit barycentre de ces deux points avec des poids positifs de somme 1.chignons donc  $t \in [0, 1]$  tel que  $\overrightarrow{AM} = (1 - t)\overrightarrow{AE} + t\overrightarrow{AC}$  c'est à dire

$$(\alpha, \alpha, 1 - \alpha) = (1 - t)(0, 0, 1) + t(1, 1, 0) = (t, t, 1 - t)$$

Donc  $t = \alpha$ .b. Les points  $E$  et  $C$  appartiennent au plan médiateur du segment  $[BD]$ ; donc ce plan contient la droite  $(EC)$  et partant le point  $M$  :  $MBD$  est un triangle isocèle en  $M$ . La distance  $d(\alpha)$  de  $M$  à cette droite est donc égale à  $MO$ ,  $O$  étant le milieu de  $[BD]$ . Les coordonnées de  $O$  sont  $(1/2, 1/2, 0)$ .

$$d(\alpha) = MO = \sqrt{(\alpha - \frac{1}{2})^2 + (\alpha - \frac{1}{2})^2 + (1 - \alpha - 0)^2} = \sqrt{3\alpha^2 - 4\alpha + \frac{3}{2}}$$

c.

Pour que la distance de  $M$  à la droite  $(BD)$  soit minimale il faut et il suffit que la fonction  $d$  ait un minimum.

$d'(x) = \frac{3\alpha - 2}{d(\alpha)}$ . Voici le tableau de variations de  $d$ .

$x$	0	2/3	1
$d'(\alpha)$	-	0	+
$d(\alpha)$			

Pour que la distance soit minimale il faut et il suffit que  $\alpha$  soit égal à  $2/3$ .

La distance minimale est alors égale à  $\sqrt{1/6}$  et les coordonnées de  $L$  sont  $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

d. Le centre de gravité du triangle  $BGD$  a pour coordonnées

$$\frac{1}{3}(x_B + x_G + x_D, y_B + y_G + y_D, z_B + z_G + z_D) = \frac{1}{3}(2, 2, 1) = \text{coordonnées de } L.$$

Le centre de gravité de  $BGD$  est bien  $L$ .

4. a. Soit  $P$  un point de coordonnées  $(x, y, z)$  et  $P'$  un point de coordonnées  $(x', y', z')$ .

$$\begin{aligned} P' = h(P) &\Leftrightarrow \overrightarrow{EP'} = \alpha \overrightarrow{EP} \\ &\Leftrightarrow (x', y', z' - 1) = \alpha(x, y, z - 1) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha x \\ y' = \alpha y \\ z' = \alpha z + 1 - \alpha \end{cases} \end{aligned}$$

Ce dernier système est l'expression analytique de  $h$ .

b. Posons  $h(C) = C'$ . D'après la question précédente,  $C'$  a pour coordonnées :

$$(k x_C, k y_C, z_C + 1 - k) = (k, k, 1 - \alpha) = \text{coordonnées de } M;$$

donc  $M = C' = h(C)$ .

c.  $S'$  est la sphère de centre  $h(C) = M$  et de rayon  $|k|r$ . Un point  $P$  de coordonnées  $(x, z, y)$  appartient donc à la sphère  $S'$  si et seulement si  $MP^2 = k^2 r^2$  c'est à dire

$(x-k)^2 + (y-k)^2 + (z-1+k)^2 = \frac{1}{3}k^2$ . Cette dernière équation est donc une équation cartésienne de  $S'$ .

### Exercice 2 (4 points).

Soit  $a$  un entier naturel non nul et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite définie par :

$$u_n = \text{pgcd}(n, a).$$

1. a.  $u_0 = \text{pgcd}(0, 15) = 15, u_1 = \text{pgcd}(1, 15) = 1, u_2 = \text{pgcd}(2, 15) = 1$ .

b. Pour  $a = 4, u_m = u_n = 2$  signifie  $\text{pgcd}(m, 4) = \text{pgcd}(n, 4) = 2$ .

$m$  et  $n$  sont donc des nombres paires non multiples de 4.

Il existe donc des entiers naturels impairs  $2m' + 1$  et  $2n' + 1$  tels que  $m = 2(2m' + 1)$  et  $n = 2(2n' + 1)$ .

Alors  $m + n = 4(m' + n' + 1)$ , puis  $\text{pgcd}(m + n, 4) = 4$  c'est à dire  $u_{m+n} = 4$ .

2. a. Soit  $b$  un entier naturel.

Démontrer que pour tout entier relatif  $q$  on a :  $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(a, b - qa)$ .

Soit  $d$  un entier.

Si  $d$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b$ , il existe deux entiers  $m$  et  $n$  tels que  $a = dm$  et  $b = dn$ .

Alors  $b - qa = d(n - qm)$ . Donc  $d$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b - qa$ .

Réciproquement, si  $d$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b - qa$ , il existe deux entiers  $m'$  et  $n'$  tels que  $a = dm'$  et  $b - qa = dn'$ . Alors  $b = (b - qa) + qa = d(n' + qm')$ . Donc  $d$  est un diviseur commun de  $a$  et  $b$ .

$\{a, b\}$  et  $\{a, b - qa\}$  ayant les mêmes diviseurs commun ont le même pgcd.

b.  $u_0 = \text{pgcd}(0, a) = a$  et  $u_a = \text{pgcd}(a, a) = a$ .

**c.**

$$\begin{aligned} u_{n+a} &= \text{pgcd}(a, n+a) \\ &= \text{pgcd}(a, n) \text{ d'après le a. avec } b = n+a \text{ et } q = -1. \\ &= u_n \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que la suite  $(u_n)$  est *périodique et a est une période*.

**3.**  $n = 15^{21} + 2 = 2 + 15m$  avec  $m = 15^{20}$  donc

$$\begin{aligned} u_n &= u_{2+15m} \\ &= u_2 \text{ car } 15 \text{ est une période de } (u_n) \\ &= \text{pgcd}(2, 15) \\ &= 1 \end{aligned}$$

**PROBLEME.**

**Partie A**

**1. a.**

La fonction  $\varphi : x \mapsto \ln x - x$  est définie et continue sur  $\mathbb{R}_+^*$ . Elle est dérivable et

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \varphi'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x}.$$

Voici son tableau de variations.

On y voit clairement que le maximum de  $\varphi$  est  $-1$  donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ln x - x \leq -1 < 0.$$

Remarquer qu'on n'a pas besoin des limites de  $\varphi$  aux bornes de son ensemble de définition.

**b.** L'application  $f_n$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $\forall x \in \mathbb{R}, f'_n(x) = 1 + e^x$ . La dérivé étant strictement positive, la fonction  $f_n$  est strictement croissante.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

Par conséquent,  $f_n$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $f_n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ , et l'équation  $f_n(x) = 0$  (c'est à dire l'équation  $(E_n)$ ) admet une solution unique (dépendant naturellement  $n$ ).

$$f_n(\ln n) = \ln n > 0 \text{ et } f_n\left(\ln \frac{n}{2}\right) = \ln \frac{n}{2} - \frac{n}{2} < 0 \text{ d'après le a.}$$

Ainsi  $f_n(\ln n) \times f_n\left(\ln \frac{n}{2}\right) < 0$ , donc  $u_n$  appartient à  $]\ln(n/2), \ln n[$

**c.** La relation  $u_n > \ln \frac{n}{2} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$  entraînent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ .

De  $\ln \frac{n}{2} < u_n \leq \ln n$  on tire :

- En divisant par  $n$ ,  $\frac{\ln n}{n} - \frac{\ln 2}{n} < \frac{u_n}{n} \leq \frac{\ln n}{n}$  et comme les suites minorante et majorante

ont 0 comme limite commune, le théorème des gendarmes permet d'écrire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0$ .

- En divisant par  $\ln n$ ,  $1 - \frac{\ln 2}{\ln n} < \frac{u_n}{\ln n} \leq 1$  et comme les suites minorante et majorante (suite constante) ont 1 comme limite commune, le théorème des gendarmes permet d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{\ln n} = 1.$$

**d.** Pour  $n = 1$ , on a  $u_1 + e^{u_1} - 1 = 0$ , donc  $u_1 = 0$ .

**2. a.** On a, en suivant la remarque 
$$\frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = \frac{n+1-u_{n+1}}{n-u_n} = \frac{n+1}{n} \frac{1-\frac{u_{n+1}}{n+1}}{1-\frac{u_n}{n}}$$

Le premier facteur a pour limite 1 et le deuxième facteur, compte tenu du fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 0, \text{ a aussi pour limite } 1. \text{ Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = 1.$$

Comme  $\frac{e^{u_{n+1}}}{e^{u_n}} = e^{u_{n+1}-u_n}$  a pour limite 1, on a bien  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{n+1} - u_n = 0$

**b.** On a  $f_n(u_n) = 0$  et en suivant la remarque  $f_n(u_{n+1}) = u_{n+1} + e^{u_{n+1}} + n = (n+1) - n = 1$ . la relation  $f_n(u_n) = 0 < 1 = f_n(u_{n+1})$  et la stricte croissance de l'application  $f_n$  entraînent  $u_n < u_{n+1}$ ; la suite  $(u_n)$  est donc strictement croissante.

**c.**

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_n &= \int_{u_n}^{u_{n+1}} f_n(x) dx \\ &= \left[ \frac{1}{2}x^2 + e^x - nx \right]_{u_n}^{u_{n+1}} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + e^{u_{n+1}} - nu_{n+1} - \left( \frac{1}{2}u_n^2 + e^{u_n} - nu_n \right) \text{ puis, suivant la remarque} \\ &= \frac{1}{2}u_{n+1}^2 + (n+1) - u_{n+1} - nu_{n+1} - \left( \frac{1}{2}u_n^2 + n - u_n - nu_n \right) \\ &= \frac{1}{2}(u_{n+1}^2 - u_n^2) - (n+1)(u_{n+1} - u_n) + 1 \end{aligned}$$

Puisque l'application  $f_n$  est croissante, on a pour tout  $t$  appartenant à  $[u_n, u_{n+1}]$ ,  $f_n(u_n) \leq f_n(t) \leq f_n(u_{n+1})$  c'est à dire  $0 \leq f_n(t) \leq 1$  puis par intégration

$$0 \leq \mathcal{A}_n \leq \int_{u_n}^{u_{n+1}} 1 dx = u_{n+1} - u_n.$$

comme les suites minorante (suite constante égale à 0) et majorante ont 0 comme limite commune, le théorème des gendarmes permet d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 0$$

**3. a.** La fonction  $\psi : x \mapsto \ln(1+x)$  est définie, continue et dérivable sur son ensemble de définition  $D = ]-1, +\infty[$ . Sa dérivé est l'application  $x \mapsto \frac{1}{1+x}$ , elle vaut 1 au point 0. Donc

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} - 1 = 0. \text{ En posant}$$

$$\varepsilon(h) = \frac{\psi(h) - \psi(0)}{h} - 1 \text{ si } h \neq 0 \text{ et } \varepsilon(0) = 0,$$

on bien  $\psi(h) = h + h\varepsilon(h)$  pour tout  $h$  appartenant à  $D$ .

**b.** On sait d'après le résultat de la question 1 que  $\frac{u_n}{\ln n}$  a pour limite 1, donc  $(\alpha_n)$  a pour limite 0.

On déduit de  $u_n = \ln n + \alpha_n \ln n$  et en suivant la remarque :

$$\begin{aligned} e^{u_n} &= n - u_n = n - \ln n - \alpha_n \ln n \\ \Rightarrow u_n &= \ln \left( n - \ln n - \alpha_n \ln n \right) \\ &= \ln n + \ln \left( 1 - \frac{\ln n}{n} - \alpha_n \frac{\ln n}{n} \right) \\ &= \ln n + \ln \left( 1 + y_n \right) \end{aligned}$$

Puisque la suite  $(y_n)$  a pour limite 0, on peut écrire, d'après la question précédente :  $u_n = \ln n + y_n + y_n \varepsilon_n$ ,  $(\varepsilon_n)$  étant une suite ayant pour limite 0.

$$\begin{aligned} \text{Donc } u_n &= \ln n - \frac{\ln n}{n} - \alpha_n \frac{\ln n}{n} - \left( -\frac{\ln n}{n} - \alpha_n \frac{\ln n}{n} \right) \varepsilon_n \\ &= \ln n - \frac{\ln n}{n} + \beta_n \frac{\ln n}{n} \text{ avec } \beta_n = -\alpha_n + \varepsilon_n + \alpha_n \varepsilon_n \end{aligned}$$

## Partie B

**1. a.**

On a d'après l'indication de la première partie,

$$e^{u_2} = 2 - u_2 \quad \text{c'est à dire} \quad u_2 = \ln(2 - u_2) = g(u_2).$$

$u_2$  est un point fixe de  $g$ .

Or  $g$  est dérivable dans  $[a, b]$  et  $\forall x \in [a, b], g'(x) = -\frac{1}{2-x}$ . La dérivée de  $g$  étant  $< 0$ ,  $g$  est strictement décroissante; donc  $u_2$  est le seul point fixe de  $g$ .

$$f_2(b) = b + e^b - 2 = \frac{2}{3} \ln 2 + 2^{2/3} - 2 \sim 0.46 > 0.$$

$$f_2(a) = f_2(\ln(2-b)) = \ln(2-b) + 2 - b - 2 = \ln(2-b) - b \sim -0.31 < 0.$$

Puisque  $f_2(a)$  et  $f_2(b)$  sont de signe contraire,  $u_2$  appartient à  $]a, b[$ .

**b.** On a déjà montré que  $g$  est dérivable sur  $I$  et  $\forall x \in I, g'(x) = -\frac{1}{2-x}$ .

$$\text{Alors } |g'(x)| = \frac{1}{2-x}.$$

L'application  $p : x \mapsto \frac{1}{2-x}$  est dérivable sur  $I$  et sa dérivée  $x \mapsto \frac{1}{(2-x)^2}$  est  $> 0$  sur  $I$ .  $p$  est donc croissante. Par conséquent

$$\forall x \in I, x \leq b \implies p(x) \leq p(b) \quad \text{c'est à dire} \quad |g'(x)| \leq |g'(b)|$$

Voici le théorème appelé *Inégalité des accroissements finis* qui permet d'en déduire que

$$\forall x, y \in I, |g(x) - g(y)| \leq |g'(b)| |x - y|.$$

Soit  $\varphi$  une application définie sur un intervalle  $J = [u, v]$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

On suppose que  $\varphi$  est continue sur  $J$ , dérivable sur  $]u, v[$  et il existe un réel  $k \geq 0$  vérifiant

$$\forall x \in ]u, v[, |\varphi'(x)| \leq k$$

Alors

$$\forall x, y \in J, |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq k |x - y|.$$

**c.**  $g$  étant continue et décroissante,  $g([a, b]) = [g(b), g(a)] = [a, g(a)]$ .

Pour que  $g(I) \subset I$ , il suffit que  $g(a) \leq b$  c'est à dire  $g[g(b)] \leq b$ , ce que montre un calcul direct (on trouve  $b - g[g(b)] \sim 0.011$ )

**2. a.** Pour répondre à la question, puisque  $I$  est contenu dans l'ensemble de définition de  $g$ , il suffit de démontrer par récurrence la propriété  $P_n : \ll a_n \text{ existe et } a_n \in I \gg$ .

$a_0 = b$  existe et  $\in I$ ,  $P_0$  est donc vraie.

Si  $P_n$  est vraie pour un entier donné  $n$  alors  $a_n$  existe et

$$\begin{aligned} a_n \in I &\implies g(a_n) \in I \text{ car } g(I) \subset I \\ &\Leftrightarrow a_{n+1} \in I \end{aligned}$$

$P_{n+1}$  est donc vraie.

**b.** Démontrons par récurrence la propriété  $D_n : \ll |a_n - u_2| \leq |g'(b)|^n (b - a) \gg$ .

On a  $|a_0 - u_2| \leq b - a = |g'(b)|^0 (b - a)$ ,  $D_0$  est donc vraie.

Si  $D_n$  est vraie pour un entier donné  $n$ , on a :

$$\begin{aligned} |g(a_n) - g(u_2)| &\leq |g'(b)| |a_n - u_2| \text{ d'après la question 1. b.} \\ \Leftrightarrow |a_{n+1} - u_2| &\leq |g'(b)| |a_n - u_2| \\ &\leq |g'(b)| |g'(b)|^n (b - a) \text{ car } D_n \text{ est supposée vraie} \\ &= |g'(b)|^{n+1} (b - a) \end{aligned}$$

$D_{n+1}$  est donc vraie.

$k = |g'(b)| = \frac{1}{2-b} \sim 0.65$  est  $< 1$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k^n = 0$  et la propriété  $D_n$  et le théorème des gendarmes entraînent  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |a_n - u_2| = 0$ .

La suite  $(a_n)$  est donc convergente et de limite  $u_2$ .

c. Pour que  $a_n$  soit une valeur approchée de  $u_2$  à  $10^{-3}$ , il suffit que  $k^n(b-a)$  soit  $\leq 10^{-3}$   
c'est à dire  $n \geq \frac{3 \ln 10 + \ln(b-a)}{\ln(2-b)} \sim 8.02$ . On peut donc prendre  $n = 9$  et  $a_9 \equiv 0.442$ .

**3.** Voir la figure 2.

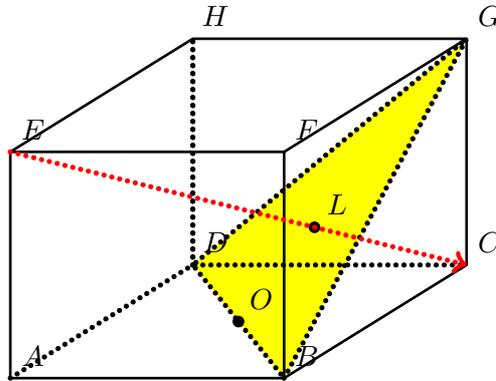


FIGURE 1. Figure de l'exercice 1

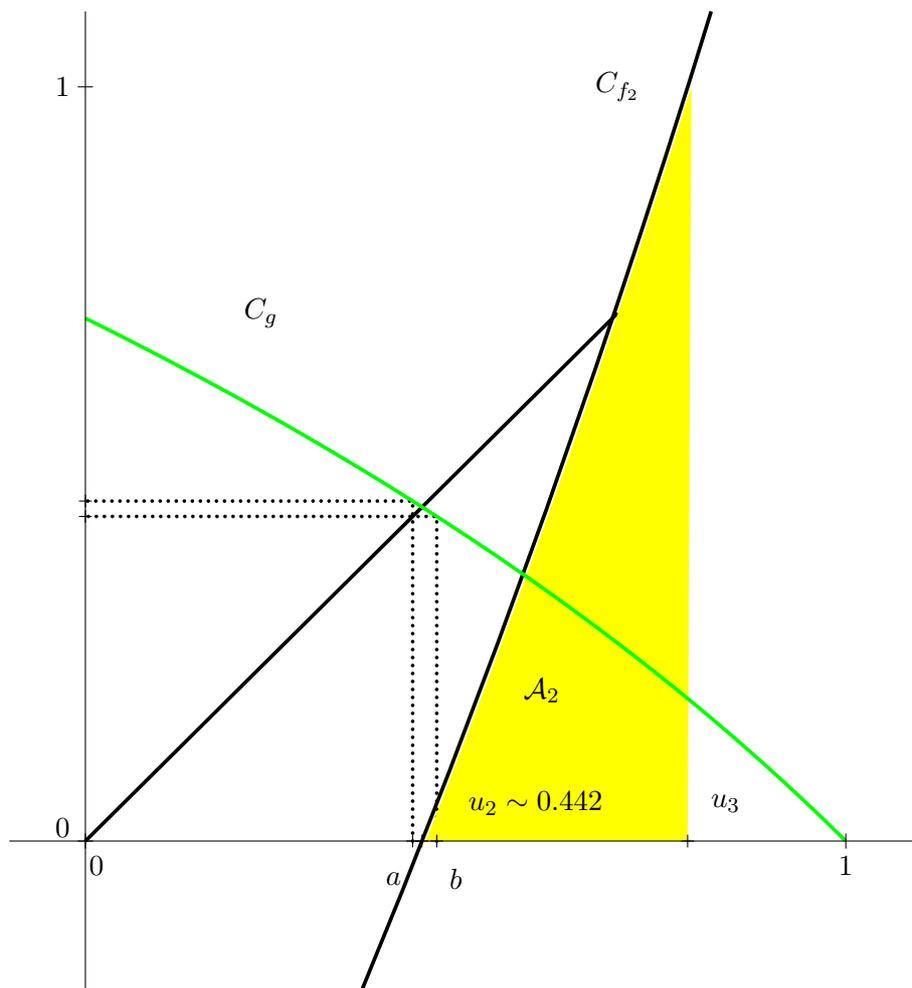


FIGURE 2. Figure du problème