



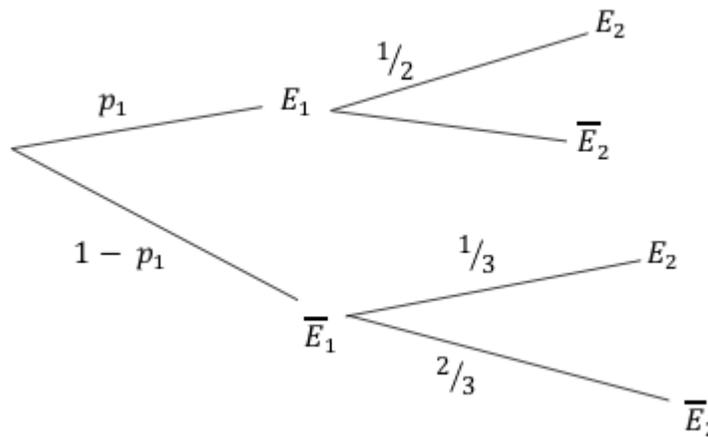
MATHÉMATIQUES
 CORRIGÉ

Exercice 1 (04, 5 points).

1. $p_1 = \frac{30}{45} = \frac{2}{3}$.

0, 5 pt

2. On donne l'arbre de choix pour déterminer les probabilités conditionnelles.



a. $p(E_2/E_1) = \frac{1}{2}$ et $p(E_2/\bar{E}_1) = \frac{1}{3}$.

(0, 25 + 0, 25)pt

b. $p(E_2) = p(E_2/E_1) \times p(E_1) + p(E_2/\bar{E}_1) \times p(\bar{E}_1) = \frac{4}{9}$.

0, 5 pt

3.

$$E_{n+1} = (E_{n+1} \cap E_n) \cup (E_{n+1} \cap \bar{E}_n),$$

d'après l'axiome des probabilités totales. D'où

$$p(E_{n+1}) = p(E_{n+1} \cap E_n) + p(E_{n+1} \cap \bar{E}_n)$$

car $E_{n+1} \cap E_n$ et $E_{n+1} \cap \bar{E}_n$ sont des événements incompatibles.

Donc

$$p_{n+1} = p(E_{n+1}/E_n) \times p_n + p(E_{n+1}/\bar{E}_n) \times p(\bar{E}_n).$$

Ce qui donne

$$p_{n+1} = \frac{1}{2} \times p_n + \frac{1}{3} \times (1 - p_n).$$

D'où $p_{n+1} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3}$.

0, 75 pt

4. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel non nul n , par : $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a.

$$u_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = \frac{1}{6} p_n + \frac{1}{3} - \frac{2}{5}.$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{6} p_n - \frac{1}{15} = \frac{1}{6} \left(p_n - \frac{2}{5} \right).$$

$$u_{n+1} = \frac{1}{6} u_n.$$

0, 5 pt

D'où $(u_n)_{n \geq 1}$ est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{6}$ et de premier terme

$$u_1 = \frac{4}{15}. \quad (0, 25 + 0, 25 \text{ pt})$$

b. $u_n = u_1 \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$, d'où $u_n = \frac{4}{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ et $p_n = \frac{4}{15} \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} + \frac{2}{5}$ pour $n \geq 1$. **(0, 5 + 0, 5) pt**

c. Ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = \frac{2}{5}$ car $q = \frac{1}{6} < 1$. **0, 25 pt**

Exercice 2 (05, 5 points).

Partie A

Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on note $f(z) = z^5 + 2z^4 + 2z^3 - z^2 - 2z - 2$.

1. Déterminons le polynôme Q tel que, $\forall z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z^3 - 1)Q(z)$.

En faisant la division euclidienne de $f(z)$ par $z^3 - 1$ on trouve que $Q(z) = z^2 + 2z + 2$. **0, 5 pt**

2. Résolvons dans \mathbb{C} l'équation $(E) : f(z) = 0$.

$f(z) = 0$ si, et seulement si $(z^3 - 1)(z^2 + 2z + 2) = 0$.

$$z^3 - 1 = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 2 = 0.$$

$$(z - 1)(z^2 + z + 1) = 0 \text{ ou } z^2 + 2z + 2 = 0.$$

Ce qui donne $z = 1$ ou $z = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$ ou $z = -1 - i$ ou $z = -1 + i$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $f(z) = 0$ est :

$$S = \left\{ 1; -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}; -\frac{1+i\sqrt{3}}{2}; -1-i; -1+i \right\}.$$

0, 5 pt

3. a. Ecriture des solutions de (E) sous forme trigonométrique :

On pose :

— $z_0 = 1 = \cos 0 + i \sin 0$ car $\arg(1) = 0 [2\pi]$.

— $z_1 = -\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, $|z_1| = 1$ et $\arg z_1 = \frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

d'où $z_1 = \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$,

— $z_2 = -\frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \bar{z}_1$, $|z_2| = 1$ et $\arg z_2 = -\frac{2\pi}{3} [2\pi]$.

d'où $z_2 = \cos \frac{2\pi}{3} - i \sin \frac{2\pi}{3}$,

— $z_3 = -1 + i$, $|z_3| = \sqrt{2}$ et $\arg z_3 = \frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

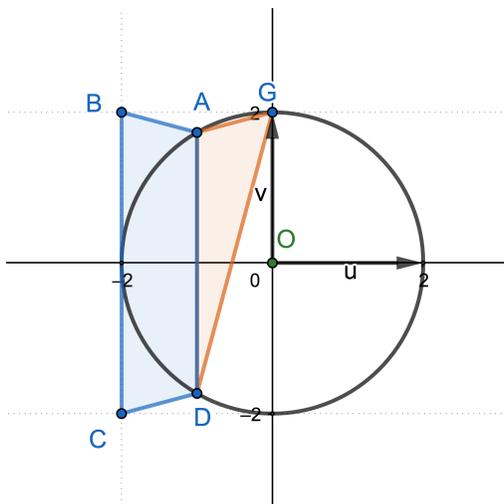
d'où $z_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}$,

— $z_4 = -1 - i = \bar{z}_3$, $|z_4| = \sqrt{2}$ et $\arg z_4 = -\frac{3\pi}{4} [2\pi]$.

d'où $z_4 = \cos \frac{3\pi}{4} - i \sin \frac{3\pi}{4}$.

0, 5 pt

b. Plaçons les points G , A , D , B et C d'affixes respectives z_0 , z_1 , z_2 , z_3 et z_4 dans le plan complexe P muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$.



0,5 pt

Partie B

1. La nature du quadrilatère ABCD :

$z_{\overrightarrow{BC}} = -2i$ et $z_{\overrightarrow{AD}} = -i$ d'où $z_{\overrightarrow{BC}} = 2z_{\overrightarrow{AD}}$ ce qui implique que (BC) et (AD) sont parallèles.

$z_{\overrightarrow{AB}} = -\frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$ et $z_{\overrightarrow{CD}} = \frac{1}{2} + i(1 - \frac{\sqrt{3}}{2})$.

$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}}$ non réel donc (AB) et (CD) sont sécantes.

Or (BC) et (AD) parallèles, et puis $AB = CD$ donc $ABCD$ est un trapèze isocèle. **0,5 pt**

2. r étant une rotation de centre Ω qui transforme A en D . On a : $r(\Omega) = \Omega$ et $r(A) = D$.

Soit f l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} associée à r , alors

$f(z) = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^* \setminus \{1\}$, $b \in \mathbb{C}$ et $|a| = 1$.

$r(\Omega) = \Omega$ équivaut à $f(z_\Omega) = z_\Omega$ et $r(A) = D$ équivaut à $f(z_A) = z_D$. Ce qui donne :

$$\begin{cases} z_\Omega = az_\Omega + b \\ z_D = az_A + b \end{cases}$$

$$a = \frac{z_D - z_\Omega}{z_A - z_\Omega} = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2},$$

$$b = z_\Omega - az_\Omega = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2},$$

ce qui donne

$$f(z) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z + \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}.$$

0,5 pt

3. Nature du triangle ΩAD :

On sait que $r(A) = D$ donc $\Omega A = \Omega D = 3$, or $AD = |z_D - z_A| = \sqrt{3}$,

d'où le triangle ΩAD est isocèle en Ω .

0,5 pt

4. Soit S le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD .

Puisque le triangle ΩAD est isocèle en Ω donc S appartient à la médiatrice du

segment $[AD]$ qui est l'axe réel, ce qui implique que

z_S l'affixe de S est réelle et $SA = SD$.

On pose $z_S = x$ ($x \in \mathbb{R}$), puisque S est le centre du cercle circonscrit au triangle ΩAD on a aussi : $|z_S - z_\Omega| = |z_S - z_D|$,

ce qui implique $|x - 1| = |x + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}|$ d'où

$$(x - 1)^2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$$

ou

$$x^2 - 2x + 1 = x^2 + x + \frac{1}{4} + \frac{3}{4}$$

Ce qui donne $x = 0$.

Donc S est confondu avec O l'origine du repère d'affixe 0.

0, 5 pt

5. $u_n = (z_A)^n, n \in \mathbb{N}^*$, où z_A est l'affixe du point A .

On sait que $z_A = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{2\pi}{3}}$, d'où

$$u_n = e^{i\frac{2n\pi}{3}}.$$

u_n est réel si, et seulement si $\sin \frac{2\pi}{3}n = 0$, ce qui implique :

$$\frac{2\pi}{3}n = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

ou

$$n = \frac{3}{2}k, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

En prenant $k = 2$, alors 3 est la valeur minimale de n pour que u_n soit un réel.

1 pt

6. La forme algébrique de u^{2019} :

$$u_{2019} = e^{i\frac{4038\pi}{3}} = e^{i1346\pi}$$

d'où

$$u_{2019} = 1.$$

0, 5 pt

PROBLEME (10 points).

Partie A

Soit g la fonction numérique définie pour tout réel x par : $g(x) = -1 + xe^{\frac{x}{2}}$.

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} xe^{\frac{x}{2}} = +\infty$ ce qui implique que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = +\infty$.

0, 25 pt

On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} Xe^X = 0$ ce qui implique après un changement de variable que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -1.$$

0, 5 pt

2.

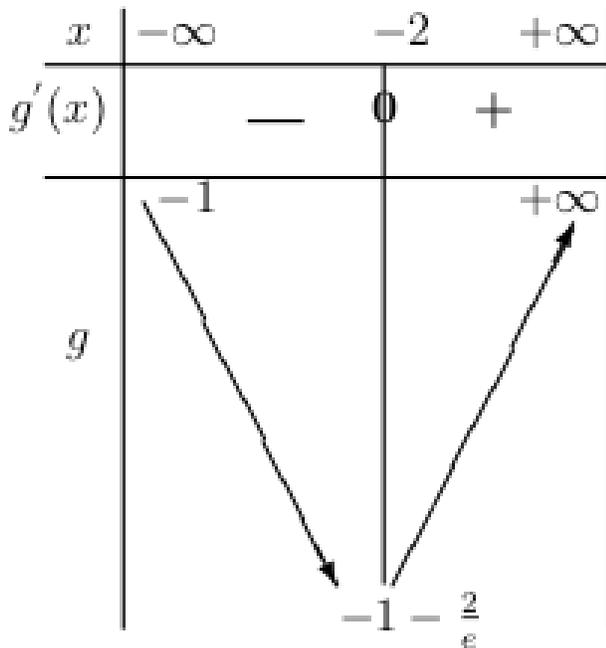
$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow e^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par composée,} \\ x \rightarrow xe^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit,} \\ \text{d'où } g : x \rightarrow -1 + xe^{\frac{x}{2}} \text{ est définie, continue et dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par somme.} \end{array} \right.$

$$g'(x) = e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}xe^{\frac{x}{2}} = e^{\frac{x}{2}}\left(1 + \frac{1}{2}x\right)$$

$$g'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}(x + 2)$$

$g'(x)$ a le même signe que $x + 2$:

sur $] -\infty; -2[$ $g'(x) < 0$; sur $] -2; +\infty[$ $g'(x) > 0$ et $g'(x) = 0$ si $x = -2$. **0,5 pt**



0,5 pt

3. g est continue et strictement croissante sur $] -2; +\infty[$, donc g est une bijection de $] -2; +\infty[$ sur $g(] -2; +\infty[) =] -1 - \frac{2}{e}; +\infty[$.

Or $0 \in] -1 - \frac{2}{e}; +\infty[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in] -2; +\infty[$.

$g(0.70) \simeq -0.007$ et $g(0.71) \simeq 0.012$, d'où $g(0.7) \times g(0.71) < 0$ donc $\alpha \in]0.70; 0.71[$. **0,75 pt**

Sur $] -\infty; \alpha[$ $g(x) < 0$; sur $[\alpha; +\infty[$ $g(x) \geq 0$. **0,5 pt**

Partie B

1. Soit f la fonction définie pour tout réel x par : $f(x) = -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}}$.

a.

$\left\{ \begin{array}{l} x \rightarrow e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par composée,} \\ x \rightarrow x - 2 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \rightarrow (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit,} \\ \text{d'où } f : x \rightarrow -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par somme.} \end{array} \right.$

$$f'(x) = -1 + e^{\frac{x}{2}}(2 + \frac{1}{2}(2x - 4)) = -1 + e^{\frac{x}{2}}(2 + x - 2) = -1 + xe^{\frac{x}{2}},$$

d'où $f'(x) = g(x)$ pour tout réel x . **0,5 pt**

b. Donc $f'(x) < 0$ sur $] -\infty; \alpha[$; $f'(x) \geq 0$ sur $[\alpha; +\infty[$. **0,5 pt**

c. On sait que, d'après 3) **Partie A**, $g(\alpha) = 0$ ce qui est équivalent à $\alpha e^{\frac{\alpha}{2}} = 1$ ou encore $e^{\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{\alpha}$ avec $\alpha \in]0.70; 0.71[$.

$$\text{d'où } f(\alpha) = -\alpha + 2 + (2\alpha - 4)\frac{1}{\alpha}.$$

$$\text{Donc } f(\alpha) = 4 - \alpha - \frac{4}{\alpha}. \quad \text{0,5 pt}$$

2. $0.70 \leq \alpha \leq 0.71$ ce qui implique $4 - \frac{4}{0.70} - 0.71 \leq 4 - \frac{4}{\alpha} - \alpha \leq 4 - \frac{4}{0.71} - 0.70$, d'où

$$-2.4 \leq f(\alpha) \leq -2.3,$$

0,5 pt

3. a. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + 2)(1 - 2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty,$ **0,5 pt**

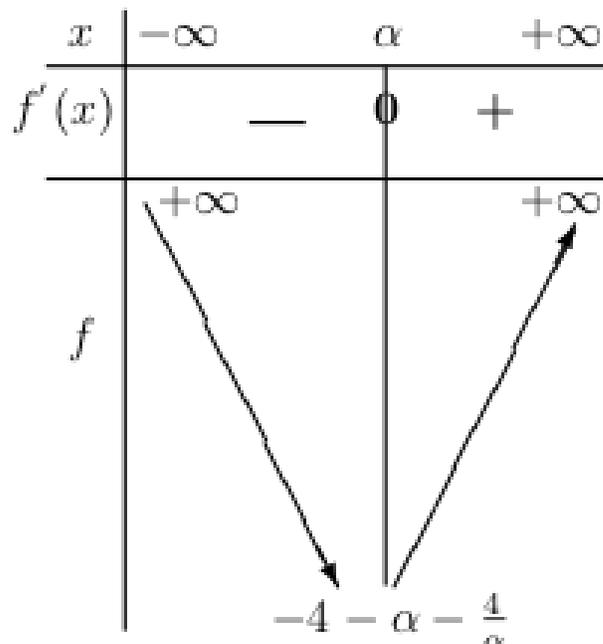
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-1 + \frac{2}{x})(1 - 2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty. \quad \text{0,25 pt}$$

b. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x + 2 + (2x - 4)e^{\frac{x}{2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (-x + 2)(1 - 2e^{\frac{x}{2}}) = +\infty,$ **0,25 pt**

4. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (-x + 2)) = \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{\frac{x}{2}} - 4e^{\frac{x}{2}} = 0,$

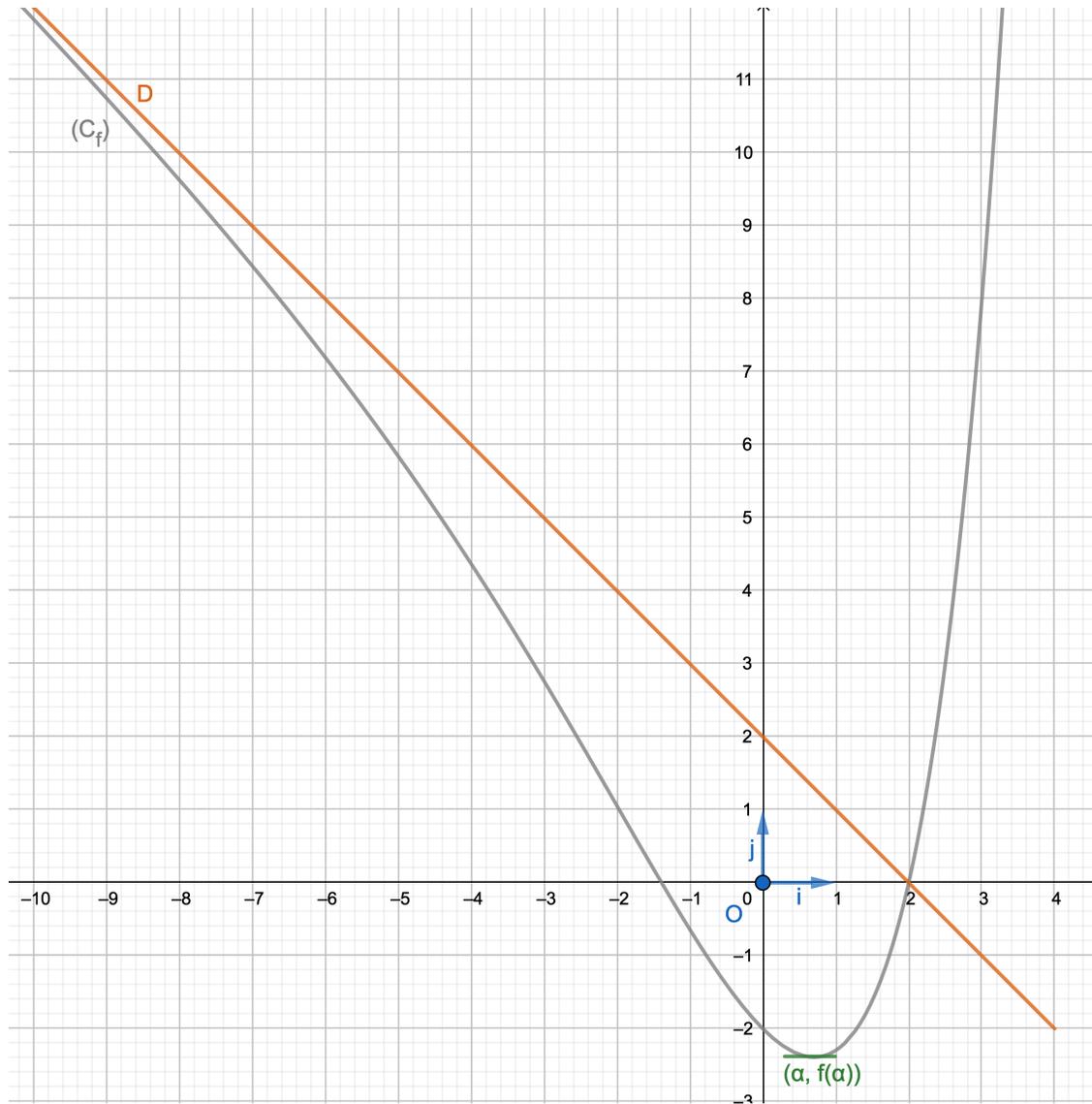
donc $(D) : y = -x + 2$ est une asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $-\infty$. **0,5 pt**

5. **0,5 pt**



6.

1,5 pt



$$7. I(x) = \int_0^x (2t - 4)e^{\frac{t}{2}} dt = \left[(4t - 16)e^{\frac{t}{2}} \right]_0^x \text{ d'où}$$

$$I(x) = (4x - 16)e^{\frac{x}{2}} + 16.$$

0,75 pt

$$8. A = \int_{\lambda}^0 (-x+2+x-2-(2x-4)e^{\frac{x}{2}}) dx \times u.a = \int_0^{\lambda} (2x-4)e^{\frac{x}{2}} dx \times 4cm^2 = \left[(4\lambda - 16)e^{\frac{\lambda}{2}} + 16 \right] \times 4cm^2,$$

$$A = \left[(16\lambda - 64)e^{\frac{\lambda}{2}} + 64 \right] cm^2.$$

0,25 pt

$$\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} A = \lim_{\lambda \rightarrow -\infty} \left[(16\lambda - 64)e^{\frac{\lambda}{2}} + 64 \right] cm^2 = 64cm^2.$$

0,5 pt