UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

2020 G 26 A N°2
4 heures
Série S2-S2A-S4-S5
Coef 5

1^{er} **groupe**

C O R R I G É D E L ' É P R E U V E

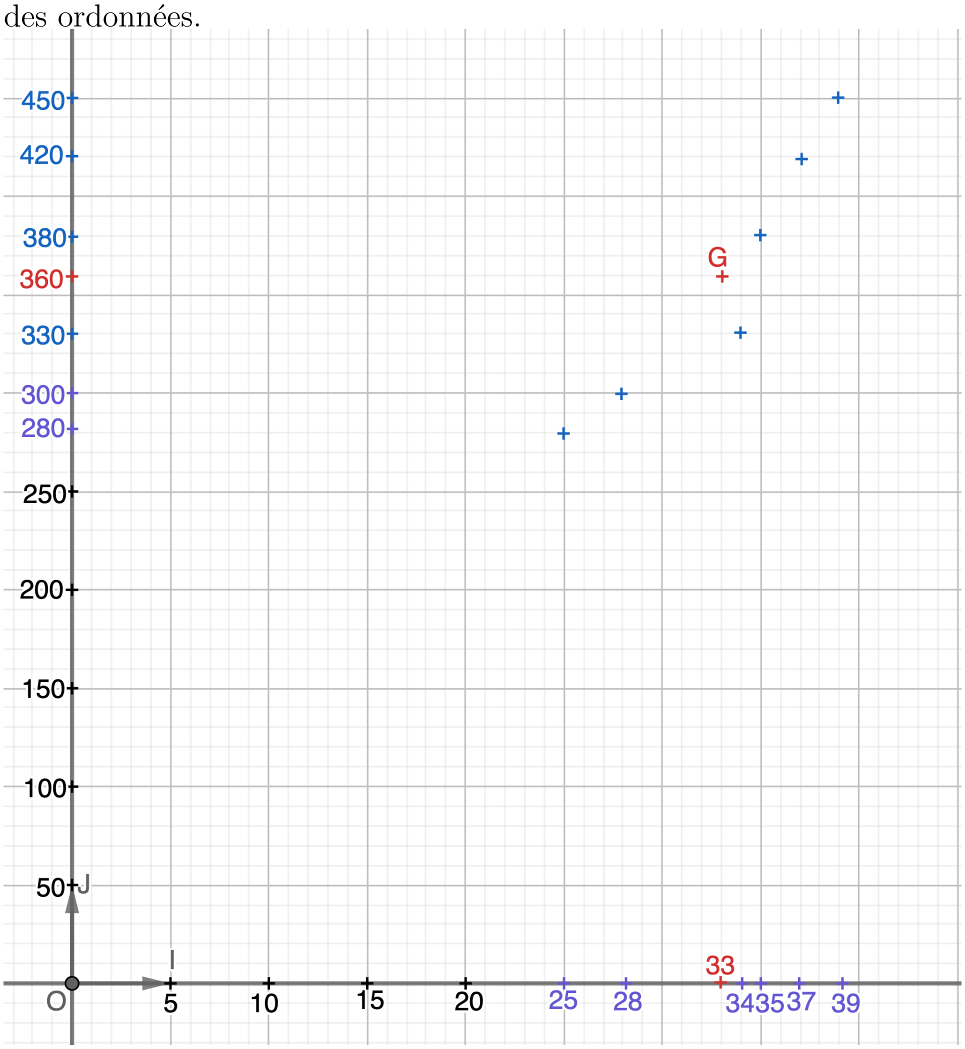
Exercice 1 (07 points).
Chaque jour, un supermarché enregistre la température à midi et le nombre de boissons froides vendues. Le gestionnaire décide de faire deux ajustements successifs afin de définir le meilleur modèle de prévision avec ces données. **Les résultats seront donnés à 10^{-2} près par excès.**

Partie A

Le tableau suivant présente les données enregistrées par le supermarché au cours des six derniers jours.

Température à midi en °C (x)	25	28	34	35	37	39
Nombre de boissons froides vendues (y)	280	300	330	380	420	450

Construisons le nuage de points associé à la série (x, y) dans un repère orthonormé, en prenant comme unité graphique 1 cm pour 5° sur l'axe des abscisses et 1 cm pour 50 boissons sur l'axe des ordonnées.



0, 75 pt

1. a. Calculons la température moyenne $\overline{x}$ et le nombre moyen $\overline{y}$ de boissons froides vendues, au cours des six derniers jours au supermarché.

— $\overline{x} = 33$. **0,25 pt**

— $\overline{y} = 360$. **0,25 pt**

b. Point moyen $G(\overline{x}; \overline{y})$ voir figure. **0,25 pt**

2. a. Calcul du coefficient de corrélation linéaire de la série.

On sait que le coefficient de corrélation linéaire est $r = \dfrac{Cov(x,y)}{\sqrt{\sigma_x \sigma_y}}$.

Avec pour N l'effectif total de chaque série marginale, $V_x = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{i=N} x_i^2 - \overline{x}^2$, $\sigma_x = \sqrt{V_x}$, $V_y = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{i=N} y_i^2 - \overline{y}^2$, $\sigma_y = \sqrt{V_y}$ et $Cov(x,y) = \frac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{i=N} x_i y_i - \overline{xy}$.

On a après calculs, $V_x = \dfrac{73}{3}$, $V_y = \dfrac{11500}{3}$, $Cov(x,y) = \dfrac{865}{3}$ et $\mathbf{r = 0{,}95}$. **1 pt**

$r \approx 1$, il y a une forte corrélation entre x et y ce qui justifie un ajustement linéaire. **0,5 pt**

b. Déterminons une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés.

(D) a une droite de la forme $y = ax + b$, avec $a = \dfrac{Cov(x,y)}{V_x}$ et $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

D'où $(D) : y = 11,85x - 31,03$. **0,5 pt**

c. Le nombre de boissons froides vendues lors d'une journée où la température à midi est de 30° est estimé à **y= 324**. **0,25 pt**

Partie B

1. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x) = a \times e^{x \ln b} + 150$ où a et b sont des réels strictement positifs.

a. Sachant que le courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f passe les points $A(25, 280)$ et $B(39, 450)$, déterminons les valeurs exactes de a et b.

Si la courbe $(\mathcal{C}_f)$ passe les points $A(25, 280)$ et $B(39, 450)$, alors a et b sont solutions du système suivant : $\begin{cases} ae^{25\ln b} + 150 = 280 \\ ae^{39\ln b} + 150 = 450. \end{cases}$

Ce qui donne $b = e^{\frac{1}{14}\ln\frac{30}{13}}$ et $a = \dfrac{130}{e^{\frac{25}{14}\ln\frac{30}{13}}}$. **0,5 pt**

Ainsi on a, $b \approx 1,06$ et $a \approx 29,2$. **0,5 pt**

b. On pose $f(x) = 29,2 \times e^{x\ln(1,06)} + 150$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} 29,2 \times e^{x\ln(1,06)} + 150 = +\infty$. **0,25 pt**

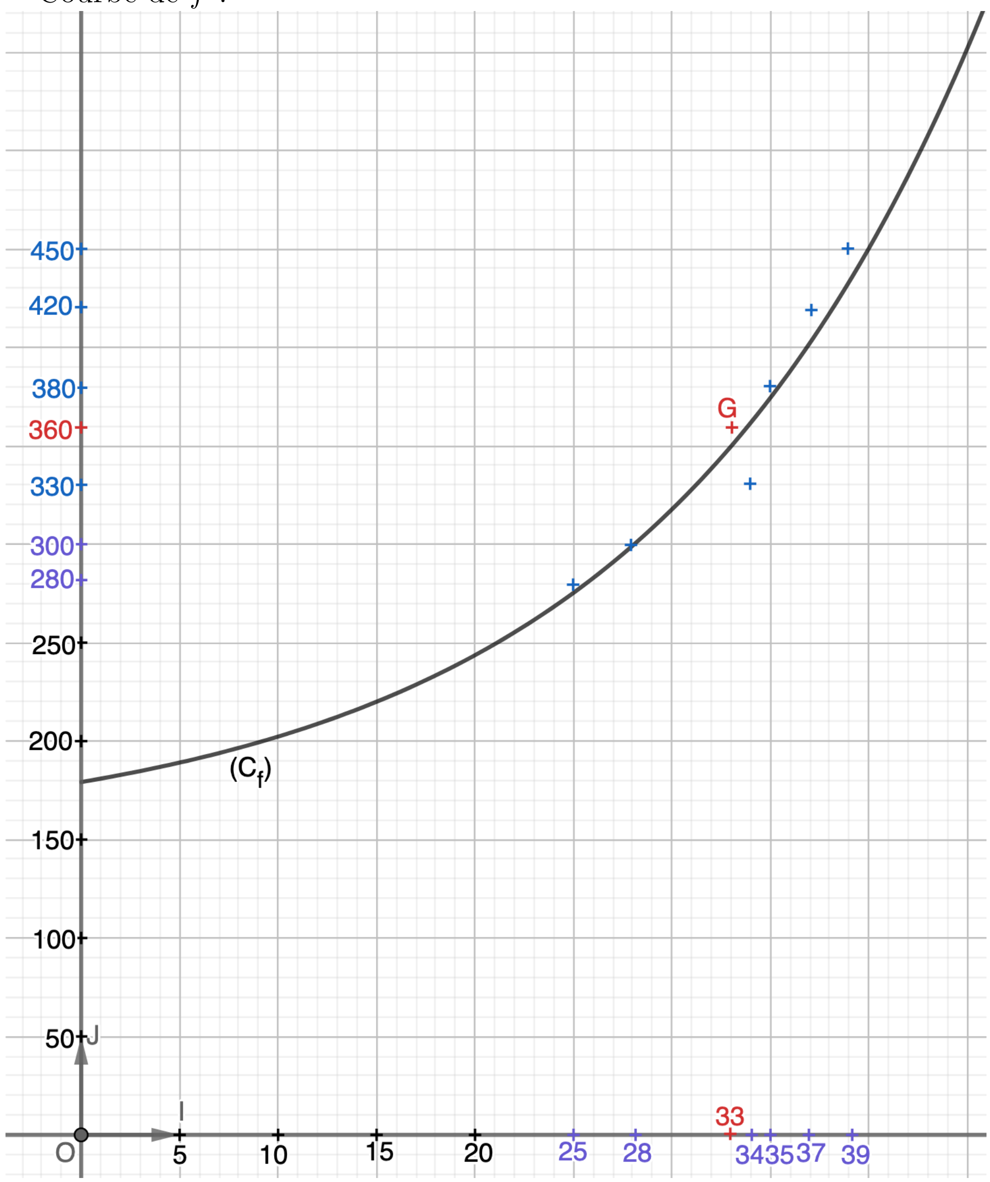
c. Dressons le tableau de variations de f.

Pour $x \in [0\ ,\ +\infty[$ on a $f'(x) = (29,2) \times (\ln(1,06)) \times e^{x\ln b}$.

Or $\ln(1,06) > 0$ d'où $f'(x) > 0$ pour tout $x \in [0\ ,\ +\infty[$. **0,5 pt**

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$179,2$	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe de f :



0, 5 pt

d. Le nombre de boissons froides vendues à nouveau si $x = 30°$ est estimé à **317**. **0, 25 pt**

Partie C

Sachant que le supermarché dispose en gros d'un stock de 500 boissons froides par jour. Cherchons le meilleur de ces deux modèles définis aux **Parties A** et **B** pour estimer le nombre de boissons vendues pour une température de 36° dans une journée.
Le nombre de boissons vendues pour une température de 36° avec le

(1) premier modèle est estimé à : $y = 11,85 \times 36 - 31,05 =$ **395**.

(2) deuxième modèle est estimé à : $y = 29,2 \times e^{36\ln(1,06)} + 150 =$ **387**.

On voit que le nombre de boissons vendues avec le premier modèle est plus grand, donc c'est ce modèle qui est le meilleur. **0, 75 pt**

Exercice 2 (04 points).
On considère le plan complexe $\mathcal{P}$ muni d'un repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.
A tout point M d'affixe z, où $z \neq -2i$, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{z-1}{-iz+2}$.
Soient A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe $-2i$.

1. a. Montrons que $|z'| = \dfrac{AM}{BM}$.

$z' = \dfrac{z-1}{-iz+2} = \dfrac{z-1}{-i(z+2i)} = i\dfrac{z-1}{z+2i} = i\dfrac{z-z_A}{z-z_B}$. D'où $|z'| = |i||\dfrac{z-z_A}{z-z_B}| = |\dfrac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}| = \dfrac{AM}{BM}$. **1pt**

b. L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que M' décrit le cercle de centre O et de rayon unité est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = BM$. C'est la médiatrice du segment $[AB]$. **1pt**

2. On suppose que $z \neq -2i$.

a. Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $M'(z')$ appartient à l'axe des réels.
$M'(z')$ appartient à l'axe des réels si, et seulement si $\overline{z'} = z'$.
Ce qui est équivalent à $\dfrac{z-1}{-iz+2} = \dfrac{\overline{z}-1}{i\overline{z}+2}$, pour tout $z \neq -2i$.
Ou encore $2iz\overline{z} + 2(z-\overline{z}) - i(z+\overline{z}) = 0$, pour tout $z \neq -2i$.
Posons $z = x+iy$, on obtient alors $x^2+y^2+2y-x = 0$, avec $x \neq 0$ et $y \neq -2$.
D'où l'ensemble des points $M(z)$ tels que $M'(z')$ appartient à l'axe des réels est le cercle de centre $\Omega(\frac{1}{2}, -1)$ et de rayon $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$, privé du point B. **1pt**

b. Déterminons l'ensemble des points $M(z)$ tels que $M'(z')$ appartient à l'axe imaginaire.
$M'(z')$ appartient à l'axe imaginaire si, et seulement si $\overline{z'} = -z'$.
Ce qui est équivalent, pour tout $z \neq -2i$, à $\dfrac{\overline{z}-1}{i\overline{z}+2} = \dfrac{z-1}{iz-2}$.
Ou encore $i(z-\overline{z}) + 2(z+\overline{z}) - 4 = 0$, pour tout $z \neq -2i$.
Posons $z = x+iy$, on obtient alors $y-2x+2 = 0$, avec $x \neq 0$ et $y \neq -2$.
D'où l'ensemble des points $M(z)$ tels que $M'(z')$ appartient à l'axe imaginaire est la droite d'équation $y-2x+2=0$, privé du point B. **1pt**

PROBLEME (09 points).

Soit f la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} e^x - x & si\ \ x < 0 \\ \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 1 cm.

1. Montrons que f est définie sur $\mathbb{R}$.

— La fonction $x \longmapsto -x$ est définie sur $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction exponentielle, $x \longmapsto e^x$ est définie sur $\mathbb{R}$.
D'où $x \longmapsto e^x - x$ est définie par somme, sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction $x \longmapsto e^x - x$ est définie si $x < 0$.

— La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}$ est définie si $-x^2+x-1 \neq 0$ car est elle est une fonction rationnelle. Or $-x^2+x-1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}$ est définie sur $\mathbb{R}$.
Par conséquent, la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}$ est définie si $x \geq 0$.

D'où f est définie sur $\mathbb{R}$. **0,5pt**

2. a. Calculons les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.

— $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x - x = +\infty$, **0,25 pt**

— $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2(1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2})}{-x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})} = -1$, **0,25 pt**

b. Calculons $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x]$.

$\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x] = \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$. **0,25 pt**

c. $\lim\limits_{x\to-\infty}[f(x)+x] = 0$, donc la droite (D_1) d'équation $y=-x$ est asymptote oblique à la courbe de f au voisinage de $-\infty$. **0,5pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -1$, donc la droite (D_2) d'équation $y=-1$ est une asymptote horizontale à la courbe de f au voisinage de $+\infty$. **0,25pt**

3. a. Etudions la continuité de f en 0.

- $f(0) = \dfrac{0^2+0-1}{-0^2+0-1} = 1$,
- $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} e^x - x = 1$,
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1} = 1$.

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0) = 1$. Donc f est continue en 0. **0,5 pt**

Etudions la continuité de f sur son ensemble de définition.

- La fonction $x \longmapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$ car est un polynôme et la fonction exponentielle $x \longmapsto e^x$ est continue sur $\mathbb{R}$.
  D'où la fonction $x \longmapsto e^x - x$ est continue par somme, sur $\mathbb{R}$.
  Par conséquent, la fonction $x \longmapsto e^x - x$ est continue pour tout $x \in]-\infty\,,\,0[$. **0,25 pt**

- La fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}$ est continue pour tout x tel que $-x^2+x-1 \neq 0$ car est elle est une fonction rationnelle. Or $-x^2+x-1 \neq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  Donc la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}$ est continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.
  D'où la fonction $x \longmapsto \dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}$ est continue pour tout $x \in]0,+\infty[$. **0,25 pt**

Donc f est continue partout dans $\mathbb{R}$.

b. Etudions la dérivabilité de f en 0.

$$\lim_{x\to0,\,x<0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0,\,x<0} \frac{f(x)-1}{x-0} = \lim_{x\to0,\,x<0} \frac{e^x-x-1}{x} = \lim_{x\to0,\,x<0} \frac{e^x-1}{x} - \frac{x}{x} = 1-1 = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-1}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{\dfrac{x^2+x-1}{-x^2+x-1}-1}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{2x}{-x^2+x-1} = 0$$

$$\lim_{x\to0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0.$$

Donc f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$. **0,25pt**

Interprétation graphique du résultat :

La courbe de f admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0. **0,25pt**

4. Calcul de $f'(x)$.

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & si\ \ x<0 \\ \dfrac{2x(x-2)}{(-x^2+x-1)^2} & si\ \ x \geq 0 \end{cases}$$ **1pt**

Déterminer le signe de $f'(x)$.

- Sur $]-\infty,0[$ $\ f'(x) < 0$. **0,25pt**
- Sur $[0,2]$ $\ f'(x) \leq 0$ et sur $]2,+\infty[$ $\ f'(x) > 0$. **0,25pt**

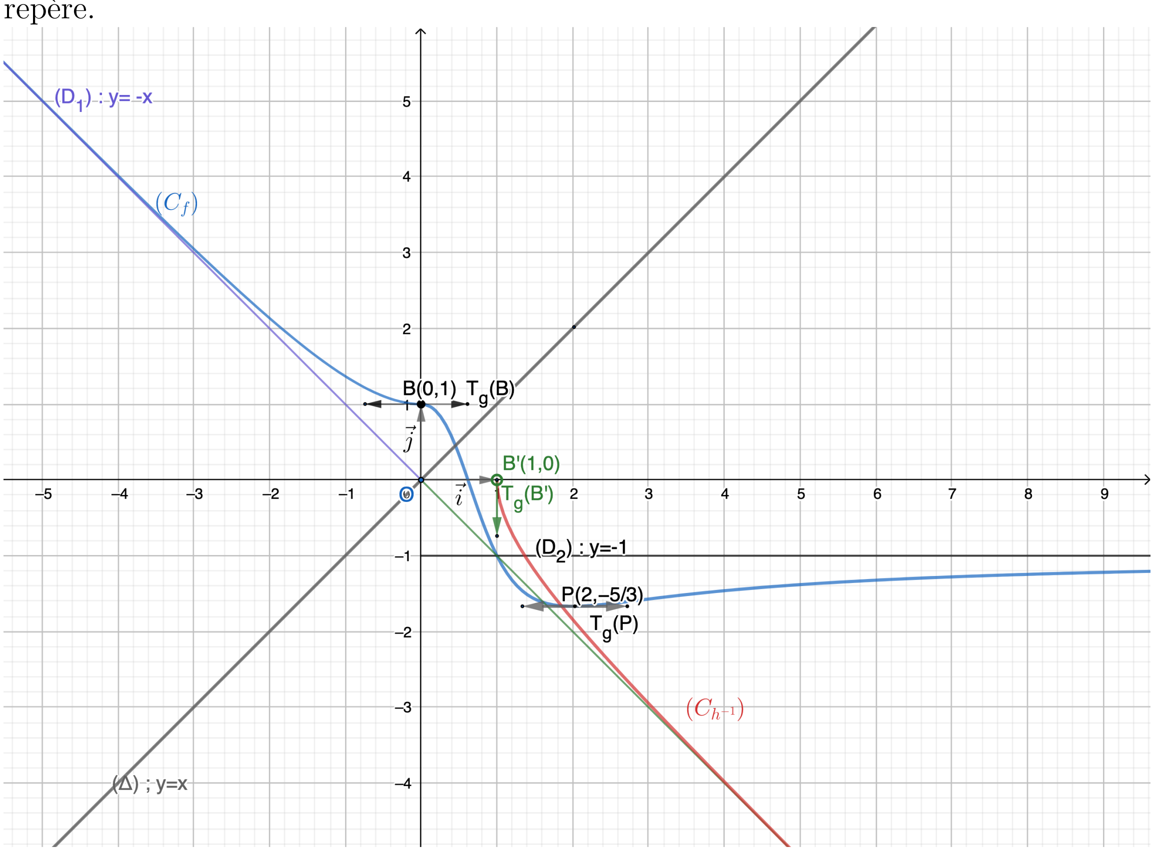
5. Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{3}$	$\nearrow$	-1

0, 5pt

6. Soit h la restriction de f à $]-\infty,\ 0[$, montrons que h réalise une bijection sur $]-\infty,\ 0[$ vers un intervalle J.
Sur $]-\infty,\ 0[$ h est continue et strictement décroissante.
Donc elle réalise une bijection de $]-\infty,\ 0[$ vers $J = h(]-\infty,\ 0[) =]1,\ +\infty[$. **0, 5pt**

7. Représentons la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de f et la courbe $(\mathcal{C}_{h^{-1}})$ de h^{-1}, réciproque de h, dans le même repère.



(1 + 0, 5)pt

8. Graphiquement, pour tout $m \geq -\frac{5}{3}$, l'équation $f(x) = m$ admet au moins une solution. **0, 25pt**

9. Calcul de l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par les d'équation $x = 0$, $x = -2$, la courbe $(\mathcal{C}_f)$ et son asymptote en $-\infty$.
$\mathcal{A} = \int_{-2}^{0} e^x dx \times u.a = (1 - e^{-2})cm^2$. **0, 25pt**

10. Soit $(U_k)_{k\geq 2}$ la suite de terme général $U_k = \displaystyle\int_{-\ln(k+1)}^{-\ln(k)} \Big(f(x)+x\Big)dx.$

a. Montrons que $U_k = \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}$.

On a : $U_k = \displaystyle\int_{-\ln(k+1)}^{-\ln(k)} \Big(f(x)+x\Big)dx = \int_{-\ln(k+1)}^{-\ln(k)} e^x dx = e^{-\ln(k)} - e^{-\ln(k+1)} = e^{\ln(\frac{1}{k})} - e^{\ln(\frac{1}{k+1})}$

$= \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}.$ **0,5pt**

b. On pose $S_n = U_2 + U_3 + \cdots + U_n$.

Exprimons S_n en fonction de n :

$S_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n+1}.$ **0,25pt**

Calculons la limite de S_n en $+\infty$.

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S_n = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}.$ **0,25pt**