❒❒◆❒❒

OFFICE DU BACCALAUREAT

E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

Durée : 4 heures
Séries : S1-S3 Coef. 8
Epreuve du 1 er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : 5 points

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1,3,2)$ et $B(4,6,-4)$.
Soit (Γ) la courbe d'équation : $x^2 + y^2 = \frac{5}{2}z^2$.

Partie A

1. Soit (P) le plan parallèle au plan (xOy) et contenant le point B.
   a) Déterminer une équation cartésienne de (P). **0,5 pt**
   b) Préciser la nature de l'intersection (C_1) de (P) et de (Γ). **0,5 pt**
2. Soit (Q) le plan d'équation $y = 3$. On note (C_2) l'intersection de (Γ) et de (Q). Reconnaitre la nature de (C_2) parmi les propositions suivantes et justifier votre choix : **1 pt**
   a) deux droites parallèles ;
   b) deux droites sécantes ;
   c) une parabole ;
   d) une hyperbole ;
   e) un cercle.

Partie B

Les ensembles (C_1) et (C_2) sont les sections définies dans la partie A.

1. On considère l'équation (E) : $x^2 + y^2 = 40$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Résoudre l'équation (E). **0,5 pt**
   b) En déduire l'ensemble des points de (C_1) dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **0,5 pt**
2. Soient x, y et z trois entiers relatifs et M le point de coordonnées (x, y, z).
   a) Démontrer que si le point M est un point de (Γ) alors z est divisible par 2 et $x^2 + y^2$ est divisible par 10. **0,5 pt**
   b) Montrer que si M est un point de (C_2), alors $x^2 \equiv 1$ modulo 10. **0,5 pt**
   c) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $x^2 \equiv 1$ modulo 10. **0,5 pt**
   d) Déterminer un point de (C_2), distinct de A, dont les coordonnées sont des entiers relatifs. **0,5 pt**

EXERCICE 2 : 5 points

Le plan complexe (P) est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, a est un réel strictement positif, A est le point de coordonnées $(a, 0)$, (D) est la droite d'équation $x = a$ et g est une fonction réelle strictement positive de la variable réelle t définie sur $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$. Pour chaque valeur du paramètre t, on note s_t l'application de (P) dans (P) qui à tout point M d'affixe z associe le point $M_t = s_t(M)$ d'affixe z_t telle que : $z_t = g(t)(cost + isint)z$.

1)a) Quelle est la nature de l'application s_t ? Donner ses éléments caractéristiques. **(0,5 pt)**

b) Donner une expression analytique de s_t et une expression analytique de s_t^{-1}. (s_t^{-1} est l'application réciproque de s_t) **(0,5pt)**

2) Dans cette question on pose : $g(t) = \frac{1}{\cos(t)}$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$,.

a) Montrer que si $M \neq O$ alors $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, le triangle $0MM_t$ est rectangle en M. **(0,5 pt)**

b) Le point M étant fixé, quel est l'ensemble $\Gamma_1\ (M)$ décrit par M_t lorsque t décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. **(0,5 pt)**

c) Montrer que l'image de la droite (D) par s_t est une droite (D_t) dont on donnera une équation cartésienne dépendant seulement de a et de tan(t). **(0,5 pt)**

3) Dans cette question on pose : $g(t) = \cos(t)$ pour tout $t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$

a) Montrer que si $M \neq O$ alors $\forall t \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$, le triangle $0MM_t$ est rectangle en M_t. **(0,5 pt)**

b) Le point M étant fixé, quel est l'ensemble $\Gamma_2\ (M)$ décrit par M_t lorsque t décrit $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$. **(0,5 pt)**

4) On suppose toujours que $(t) = \cos(t)$, $t \neq 0$. On pose $A_t = s_t\ (A)$.

a) Donner la mesure de l'angle $(\overrightarrow{AM}\ ;\ \overrightarrow{A_tM_t})$. **(0,5 pt)**

b) Soit H_t le point d'intersection des droites (AM) et (A_tM_t). Calculer la mesure des angles

$(\overrightarrow{H_tA}\ ;\ \overrightarrow{H_tA_t})$ et $(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OA_t})$. En déduire que les points O, H_t, A et A_t sont cocycliques. **(0,5 pt)**

c) Monter de même que les points O, H_t, M et M_t sont cocycliques. Quelle est la projection orthogonale de O sur la droite (AM) ? **(0,5 pt)**

Problème

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : f(0) = 0 et $f(x) = \frac{x}{x-lnx}\ si\ x > 0$ et Cf sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ du plan.

I- 1- a) Justifier que f est continue sur $[0, +\infty[$. **0,5pt**

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat. **0,75pt**

2- Etudier les variations de f et dresser son tableau de variations. **0,75pt**

3- Tracer Cf. On précisera la demi-tangente à droite au point d'abscisse 0 et la tangente T au point d'abscisse 1. **0,75pt**

4- Soit (U_n) la suite définie par $U_0 \in]0, e]\ et\ U_{n+1} = f(U_n)$. Montrer que (U_n) est convergente et déterminer sa limite. **0,5+0,5pt**

II- Soit $n \in$ IN* et f_n la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par ; $f_n(x) = f(x^n)$, on note C_n sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

1- Dresser le tableau de variations de f_n. **0,75pt**

2- Déterminer une équation de la tangente T_n à C_n au point d'abscisse 1. **0,25pt**

3- Construire C_5, T_5 et T_2. **0,75pt**

4- Soit A_n l'aire du domaine délimité par C_n, la droite $\Delta: y = x$ et les droites d'équations x = 0 et x = 1.

a) Montrer que la suite (A_n) est croissante. En déduire qu'elle est convergente. **0,5+0,5pt**

b) Pour n assez grand, on confond A_n à l'aire du domaine délimité par T_n , $\Delta: y = x$ et la droite d'équation y = 0. Soit J_n le point d'intersection de T_n et $(O, \vec{\imath})$. Calculer l'aire du triangle OIJ_n. En déduire la $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n$. **0,25+0,5pt**

5- a) Montrer que $\forall n \geq 3$, $f_n(x) = x$ admet dans $\left[\sqrt[n]{e}, +\infty\right[$ une solution unique α_n. **0,75pt**

b) Pour x≥ 1, vérifier que $x - lnx \geq 1$, puis montrer que $\forall n \geq 3,\ f_n(x) - x \leq (n+1)x^n$. **0,5+0,5pt**

c) Soit $\forall n \geq 3$ et $I_n = \int_1^{\alpha_n} [f_n(x) - x]dx$. Montrer que : $0 \leq I_n \leq {\alpha_n}^{n+1} - 1$. **0,5pt**

d) Pour n assez grand on admet qu'il existe $\alpha \epsilon]1;2[$ tel que $\alpha_n \approx 1 + \frac{\alpha}{n^2}$. Soit A'_n l'aire du domaine délimité par C_n, $\Delta: y = x$ et les droites d'équations x = 0 et x = α_n. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A'_n$ **0,5pt**