UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
**OFFICE DU BACCALAUREAT**
E .mail : office@ucad.edu.sn
**Site web : officedubac.sn**



21 G26RA0152
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

**Epreuve du 1er groupe**

# MATHEMATIQUES

**Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).**

## EXERCICE 1 (05 points)

1) On considère la suite $(u_n)$ définie par $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2u_n + n \end{cases}$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}, u_n \geq 0$. **(0,75 pt)**

b. En déduire le sens de variations de la suite $(u_n)$. **(0,75 pt)**

2) Soit $(v_n)$ la suite définie par $\begin{cases} v_0 = 1 \\ v_{n+1} = \frac{v_n - 1}{v_n + 3} \end{cases}$.

a. Calculer $v_1, v_2$ et $v_3$. **(0,75 pt)**

b. Démontrer par récurrence que pour tout $n$ élément de $\mathbb{N}, v_n > -1$. **(1 pt)**

c. Montrer que la suite $(w_n)$ telle que $w_n = \frac{1}{v_n + 1}$ est une suite arithmétique et donner son terme général. **(0,5+0,5 pt)**

d. En déduire la limite de $(v_n)$. **(0,75 pt)**

## EXERCICE 2 (06 points)

1) Pour tout nombre complexe $z$, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a. Calculer $P(-1)$. **(0,25 pt)**

b. Déterminer les réels $a$ et $b$ tels que pour tout nombre complexe $z$, on ait $P(z) = (z + 1)(z^2 + az + b)$. **(0,75 pt)**

c. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(0,75 pt)**

2) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$.
On désigne par $A, B, C$ et $G$ les points d'affixes respectives $z_A = -1, z_B = 2 + i\sqrt{3}, z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_G = 3$.

a. Calculer les distances $AB, BC$ et $AC$. En déduire la nature du triangle $ABC$. **(1 pt)**

b. Calculer un argument du nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_G - z_C}$. **(0,5 pt)**
En déduire la nature du triangle $GAC$. **(0,25 pt)**

3) Soit $(D)$ l'ensemble des points $M$ du plan tels que : $\left(-\overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MC}\right) \cdot \overrightarrow{CG} = 12$. ①

a. Montrer que $G$ est le barycentre du système de points pondérés $\{(A, -1) ; (B, 2) ; (C, 2)\}$. **(0,5 pt)**

b. Montrer que la relation ① est équivalente à la relation $\overrightarrow{GM} \cdot \overrightarrow{CG} = -4$ ② **(0,75 pt)**

c. Vérifier que le point $A$ appartient à l'ensemble $(D)$. **(0,25 pt)**

d. Montrer que la relation ② est équivalente à la relation $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{GC} = 0$. **(0,75 pt)**

e. En déduire l'ensemble $(D)$. **(0,25 pt)**

**PROBLEME** **(9 points)**

I) On considère la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} x + (1-x)e^{2x} \; si \; x \in ]-\infty, 0[ \\ xe^{-x} \; si \; x \in [0, +\infty[ \end{cases}$

et on désigne par $(C_f)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique $2\;cm$.

1) Déterminer l'ensemble de définition de $f$. **(0,5 pt)**
2) a) Etudier les limites de $f$ en $-\infty$ et en $+\infty$. **(0,5 + 0,5 pt)**
   b) Interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. **(0,5 pt)**
   c) Montrer que la droite $(\Delta)$ d'équation $y = x$ est une asymptote oblique pour $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$. **(0,5 pt)**
3) Etudier la continuité de $f$ en $0$. **(0,5 pt)**
4) Soit $h$ la fonction définie sur $]-\infty, 0[$ par : $h(x) = 1 + (1-2x)\, e^{2x}$.
   a) Dresser le tableau de variations de $h$ sur $]-\infty, 0[$. **(0,75 pt)**
   b) En déduire son signe sur $]-\infty, 0[$. **(0,5 pt)**
5) a) Etudier la dérivabilité de $f$ en 0. **(0,5 pt)**
   b) Calculer $f'(x)$ dans chaque intervalle où $f$ est dérivable. **(0,5 pt x 2)**
   c) Dresser le tableau de variations de $f$ sur $\mathbb{R}$. **(1 pt)**
6) Tracer la courbe $(C_f)$ dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$. **(1 pt)**
   (On précisera les demi-tangentes à $(C_f)$ au point $O$).

II) Soit $\alpha$ un nombre réel strictement positif $(\alpha > 0)$.

1) Calculer, en $cm^2$, l'aire $S(\alpha)$ de la partie du plan formée par l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que l'on ait : $0 \leq x \leq \alpha$ et $0 \leq y \leq f(x)$. **(0,75 pt)**
2) Déterminer la limite de $S(\alpha)$ quand $\alpha$ tend vers $+\infty$. **(0,5 pt)**