UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❒❒◆❒❒
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

21G21RA0145
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (5,5 points)

1. On considère les cercles (C) et (C') de centres respectifs O et O', de rayons respectifs r et $2r$, tangents intérieurement en A. On note A' le point de (C') diamétralement opposé à A sur (C').
Soit M un point de (C), distinct de A et de O' et soit M' le point de (C') tel que le triangle AMM' soit rectangle en A.
Soit enfin I le point tel que $\overrightarrow{OI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OO'}$.

a) Faites une figure qu'on complétera au fur et à mesure. (pour la figure, on prendra $r = 2$cm). **0,5 pt**

b) Justifiez que les points A, O, O' et A' sont alignés. **0,5 pt**

2. Soit h_k une homothétie de rapport k transformant (C) en (C').

a) Quelles sont les valeurs possibles de k ? **0,5 pt**

b) Pour chaque valeur de k, déterminez le centre de l'homothétie h_k · **0,5 pt**

c) On note $M_1 = h_2(M)$.
Montrez que M_1 est le point de (C') diamétralement opposé à M' sur (C'). **0,5 pt**

d) Justifiez que $h_{(-2)}(M) = M'$ puis déduisez-en que la droite (MM') passe par un point fixe, lorsque le point M décrit le cercle (C) privé des points A et O'. **0,75 pt**

3. La droite (MM') recoupe (C) en N et (C') en N'. Quelle est l'image de N par $h_{(-2)}$? **0,5 pt**

4. Montrez que : $(\overrightarrow{AN}, \overrightarrow{AM}) = (\overrightarrow{AN'}, \overrightarrow{AM'})[2\pi]$ puis déduisez-en que le triangle ANN' est rectangle au point A. **1 pt**

5. Soit J le milieu de $[MM']$ et D le milieu de $[OO']$.

a) Exprimez DJ en fonction de r. **0,5 pt**

b) Déduisez-en que J appartient à un cercle fixe dont on précisera le centre et le rayon. **0,25 pt**

EXERCICE 2 (4,5 points)

La fédération sénégalaise de cyclisme organise le tour du Sénégal avec 25 cyclistes portant des dossards numérotés de 1 à 25. Le tour comprend 10 étapes et aucun abandon n'est constaté.

A la fin de chaque étape, un groupe de 5 cyclistes est choisi au hasard pour subir un contrôle antidopage.

Ces désignations de 5 cyclistes à l'issue de chacune des étapes sont indépendantes.

1. Déterminez le nombre de groupes de 5 cyclistes qu'on peut former à l'issue de chaque étape. **0,5 pt**

2. Montrez que la probabilité que le cycliste portant le dossard numéro 10 subisse le contrôle prévu pour une étape donnée est égale à 0,2. **1 pt**

3. On note **X** la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de contrôles subis par le cycliste portant le dossard numéro 10 sur l'ensemble des 10 étapes de la course.

a) Quelle est la loi de probabilité de **X** ? Précisez ses paramètres. **0,5 pt**

b) Calculez la probabilité de chacun des événements suivants :

A : « Il a été contrôlé 5 fois exactement ». **0,5 pt**

B : « Il a été contrôlé au moins une fois ». **0,5 pt**

4. Pour un cycliste choisi au hasard, on appelle T l'événement : « le contrôle est positif ».
On admet que P(T) = 0,05. On note D, l'événement : « le cycliste est dopé ». On sait que :

- Si un cycliste est dopé, le contrôle est positif dans 97% des cas ;
- Si un cycliste n'est pas dopé, le contrôle est positif dans 1% des cas.

a) Calculez P(D). **1 pt**

b) Un cycliste a un contrôle positif. Quelle est la probabilité qu'il ne soit pas dopé ? **0,5 pt**

PROBLEME (10 points)

PARTIE A (3,5 points)

Soit n un entier naturel non nul, α un réel strictement positif et $g_{(\alpha,n)}$ la fonction définie par :

$$g_{(\alpha,n)}(x) = \frac{\sqrt{\ln \alpha x}}{x^n}.$$

1. a) Déterminez le domaine de définition de $g_{(\alpha,n)}$. **0,5 pt**

b) Etudiez la dérivabilité de $g_{(\alpha,n)}$ en $\frac{1}{\alpha}$ puis interprétez géométriquement le résultat. **0,75 pt**

c) Etudiez le sens de variations de $g_{(\alpha,n)}$. **1 pt**

d) Montrez que $g_{(\alpha,n)}$ admet un maximum α_n, puis exprimer α_n en fonction de n et de α. **0,5 pt**

2. On considère la suite (U_n), définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $U_n = \frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{2n}}$.

a) Etudiez le sens de variation de la suite (U_n). **0,5 pt**

b) Déterminez la limite de la suite (U_n). **0,25 pt**

…/…3

MATHEMATIQUES

Séries : S1-S1A-S3

Epreuve du 1er groupe

PARTIE B (3 points)

Pour tout entier naturel n non nul, on pose g_n la fonction définie sur $[1\,,+\infty[$ par : $g_n(x) = \frac{\sqrt{\ln x}}{x^n}$.

Soit (C_n) la courbe représentative de g_n dans le plan muni d'un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. (unité = 2 cm).

1. **a)** Etudiez la dérivabilité de g_n en 1 puis interprétez géométriquement le résultat. **1 pt**

b) Montrez que toutes les courbes (C_n) passent par un point fixe I. **0,5 pt**

c) Etudiez la position relative des courbes (C_n) et (C_{n+1}). **0,5 pt**

2. Construisez les courbes (C_1) et (C_2) dans le même repère. **1 pt**

PARTIE C (3,5 points)

Pour tout réel $\lambda \geq 1$, on pose $I_n(\lambda) = \int_1^{\lambda} g_n(t)\,dt$.

1. Calculez $I_1(\lambda)$. **0,75 pt**

2. Calculez en cm² l'aire du domaine délimité par (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = e$ et $x = e^2$. **0,5 pt**

3. Pour tout entier naturel non nul, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} \left[\frac{\sqrt{\ln\left(1+\frac{k}{2n}\right)}}{k + 2n} \right]$

a) Montrez que pour tout entier naturel k tel que $0 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{2n}\, g_1\left(1+\frac{k+1}{2n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{2n}}^{1+\frac{k+1}{2n}} g_1(x)dx \leq \frac{1}{2n}\, g_1\left(1+\frac{k}{2n}\right).$$ **0,75 pt**

b) Déduisez-en que : $S_n - \frac{1}{2n} g_1(1) \leq I_1\left(\frac{3}{2}\right) \leq S_n$. **1 pt**

c) Calculez $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n$. **0, 5 pt**