UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□♦□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

22T05AN01A29
Durée: 04 heures
Série : T1 – Coef. 5
Série : T2 – Coef. 4
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

EXERCICE 1 $(\mathbf{05\ points})$

Soit le polynôme P definie sur $\mathbb{C}$ par $\mathrm{P(z) = z^3 - (4 + i)z^2 + (7 + i)z - 4}$.

1. *Montrons que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution seule réelle z_0 que l'on déterminera.* $(\mathbf{0{,}5}\boldsymbol{pt})$

Soit α un réel.

$$P(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 4\alpha^2 + 7\alpha - 4 = 0 \\ -\alpha^2 + \alpha = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \ \alpha = 1$$

L'équation $\mathrm{P(z) = 0}$ admet une solution seule réelle $\mathrm{z_0 = 1}$.

2. *Résolvons dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.* $(\mathbf{1}\ \boldsymbol{pt})$

$\mathrm{P(z) = 0} \Leftrightarrow (z - 1)(\mathrm{z^2 - (3 + i)z + 4}) = 0.$

$$S = \{1\,, 2 + 2\mathrm{i}\,, 1 - \mathrm{i}\}$$

3. Soient A, B et C trois points du plan d'affixes respectives 1 ; 2+2i ; 1−i.

a) *Calculons $\frac{z_B}{z_C}$, en déduire la nature du triangle OBC.* $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$

$$\frac{z_B}{z_C} = \frac{2 + 2\mathrm{i}}{1 - \mathrm{i}} = 2\mathrm{i}$$

On a : $(\overrightarrow{OC};\overrightarrow{OB}) = \frac{\pi}{2}$ (2π) et $OC = 2\mathrm{OB}$; le triangle *OBC est rectangle en O*.

b) *Déterminons l'affixe du centre et le rayon du cercle circonscrit au triangle OBC.* $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$

Le cercle circonscrit au triangle *OBC* a pour diamètre hypoténuse $[BC]$.

Son centre est donc le milieu I de $[BC]$ qui a pour affixe $\frac{3}{2} + \frac{1}{2}$ et son rayon est $\frac{BC}{2} = \frac{\sqrt{10}}{2}$.

4. *Déterminons l'affixe du point D pour que le quadrilatère OBDC soit un rectangle.* $(\mathbf{0{,}75}\boldsymbol{pt})$

Pour que *OBDC* soit un rectangle, il suffit que $\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{CD}$; ce qui équivaut a : $z_D - z_C = z_B$.
D'où, : $z_D = 3 + i$

5. Déterminons la nature exacte et les éléments caractéristiques de la similitude plane directe f dont l'écriture complexe est : $z' = -\frac{1}{2}iz$. $(\mathbf{0{,}75pt})$

La similitude plane directe f est la composée de l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{1}{2}$ et de la rotation de centre O et dangle $\frac{\pi}{2}$.

On peut aussi accepter la réponse suivante : **$\boldsymbol{f}$ est la similitude plane directe de centre $\boldsymbol{O}$, de rapport $\frac{1}{2}$ et dangle $-\frac{\pi}{2}$.**

EXERCICE 2 **(05 points)**

Dans le plan rapporté au repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath}\,,\vec{k})$, on considère les points $A(2,-1,1)$, $B\,(-1,1\,,2)$ et $C(0,2,3)$.

1. *Montrons que les points A, B et C déterminent un plan.* **(0,5pt)**

Il suffit de montrer que les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

On a : $\overrightarrow{AB}(-3\,,2\,,1\,)$ et $\overrightarrow{AC}(-2\,,3\,,2\,)$ qui ne sont pas colinéaires. Par conséquent, les points *A*, *B* et *C* ne sont pas alignés.

2. *Calculons l'aire du triangle ABC.* **(0,5pt)**

L'aire du triangle ABC est $\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$. Or, $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}(1\,,4\,,-5)$.

L'aire du triangle ABC est $\frac{\sqrt{42}}{2}$

3. *Déterminons une équation du plan (ABC).* **(1pt)**

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC). Par conséquent, le plan (ABC) a une équation de la forme $x+4y-5z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

Le point C appartient a ce plan, donc $8-15+d=0$. On en déduit que $d=7$.

Le plan ABC a pour équation : $x+4y-5z+7=0$

4. Soit K (4,4,3) et H son projeté orthogonal sur le plan (ABC).

a) *Déterminons un système d'équations paramétriques de la droite passant par K et perpendiculaire au plan (ABC).* **(1pt)**

La droite passant par K et perpendiculaire au plan (ABC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

Un système d'équations paramétriques de cette droite est : $\begin{cases} x=4+t \\ y=4+4t \\ z=3-5t \end{cases}$ $t\in\mathbb{R}$.

b) *Calculons les coordonnées du point H.* **(0,5pt)**

Le point H est un point de la droite précédente et il appartient au plan (ABC) ; son paramètre t vérifie :

$(4+t)+4(4+4t)-5(3-5t)+7=0$; ce qui donne $t=-\frac{2}{7}\cdot$

Il s'en suit que $H\left(\frac{26}{7}\,,\frac{20}{7},\frac{31}{7}\right)$.

c) *Calculons la distance KH.* **(0,5pt)**

$$KH=\sqrt{\left(4-\frac{26}{7}\right)^2+\left(4-\frac{20}{7}\right)^2+\left(3-\frac{31}{7}\right)^2}=\frac{1}{7}\sqrt{168}$$

d) *Déduisons-en le volume du tétraèdre KABC.* **(1pt)**

Le volume du tétraèdre est : $\frac{1}{3}\times Aire\ (ABC)\times KH=\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{42}}{2}\times\frac{1}{7}\sqrt{168}=2$

PROBLEME **(10 points)**

PARTIE A **(02 points)**

1. *Résolvons l'équation différentielle (E) :* $4y''+4y'+y=0$ **(1pt)**

La solution générale est : $y=(Ax+B)e^{-\frac{x}{2}}$, $A\in\mathbb{R}$, $B\in\mathbb{R}$.

2. *Trouvons la solution particulière g de (E) dont la courbe représentative tracée dans un repère orthonormal passe par le point $A(0,4)$ et admet en ce point une tangente de coefficient directeur -1.* $(\mathbf{1}\boldsymbol{pt})$

Posons $g(x) = (Ax + b)e^{-\frac{x}{2}}$. On a alors $g'(x) = \left(A - \frac{A}{2}x - \frac{B}{2}\right)e^{-\frac{x}{2}}$

On doit avoir $g(0) = 4$ et $g'(0) = -1$. On en déduit que $A = 1$ et $B = 4$.

$$g(x) = (x + 4)e^{-\frac{x}{2}}$$

<u>PARTIE B</u> $(\mathbf{06\ points})$

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (x + 4)e^{-\frac{x}{2}}$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ (unité graphique 2 cm).

1. *Déterminons l'ensemble de définition de f.* $(\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt})$

L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$

2. *Calculons la limite de f en $+\infty$ puis interprétons géométriquement le résultat.* $(\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt} + \mathbf{0,25}\boldsymbol{pt})$

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$; la droite d'équation $y = 0$ est asymptote a (C_f)

3. *Calculons la limite de f en $-\infty$ puis étudions la branche infinie de (C_f) en $-\infty$ ·* $(\mathbf{0,25}\boldsymbol{pt} + \mathbf{0,25}\boldsymbol{pt})$

On a : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

La courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction $\vec{\jmath}$ en $-\infty$.

4. *Justifions que f est dérivable sur son ensemble définition puis calculons l'expression $f'(x)$ de sa dérivée.* $(\mathbf{0,25pt} + \mathbf{0,5pt})$

La fonction f est derivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \left(-\frac{x}{2} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}}$$

5. *Etudions le signe de $f'(x)$ puis établissons le tableau de variations de f.* $(\mathbf{0,5}\boldsymbol{pt})$

x	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$	0

6. *Montrons que la tangente (T) à (C_f) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y = -x + 4$.* $(\mathbf{0,5pt})$

$f(0) = 4$ et $f'(0) = -1$

7. Soit h la fonction définie par : $h(x) = f(x) - (-x + 4)$.

a) Calculons $h'(x)$ et $h''(x)$, expressions respectives de la dérivée première et seconde de h. $(\mathbf{0,25pt} + \mathbf{0,25pt})$

$h'(x) = \left(-\frac{x}{2} - 1\right)e^{-\frac{x}{2}} - 1$ et $h''(x) = \frac{x}{4}e^{-\frac{x}{2}}$

b) *Etudions le sens de variations de h' et déduisons-en le signe de $h'(x)$ suivant les valeurs de x.*

$(0,5\ \text{pt} + 0,25\text{pt})$

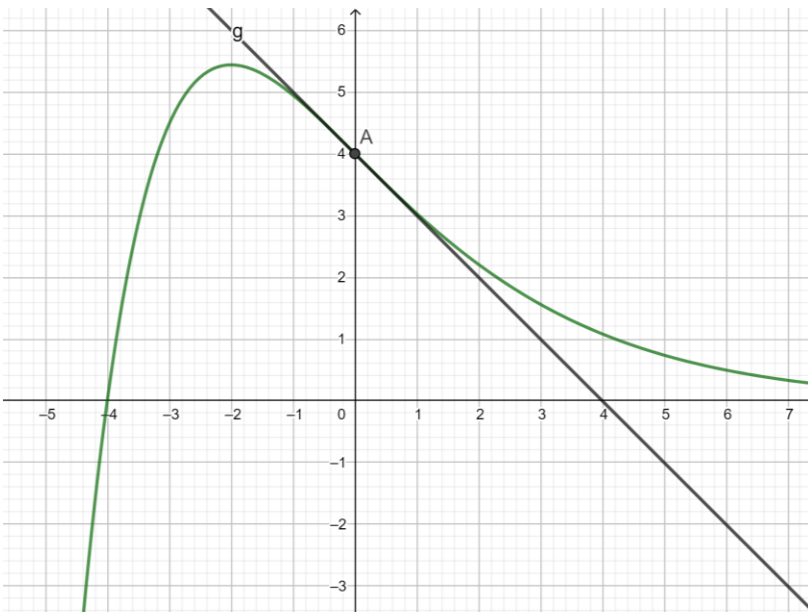
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h''(x)$	$-$		$+$
h'	↘	0	↗

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		$+$	
h		↗ 0	

8. *Déterminons alors le signe de $h(x)$ puis la position de (C_f) par rapport a (T).* **$(0,5 + 0,25pt)$**

Sur $]-\infty, 0[$, $h(x) < 0$, (T) est au-dessus de (C_f) et sur $]\,0\,,+\infty[$, $h(x) > 0$, (T) est au-dessous de (C_f)

9. *Construisons (C_f) et (T).* ***(1 pt)***



PARTIE C **(02 points)**

Soit λ un réel tel que $\lambda > -4$.

1. *Calculons et fonction de λ et en cm^2 l'aire $A(\lambda)$ de la surface limitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d`équations $x = -4$ et $x = \lambda$.* **(1 pt)**

$$\mathrm{A}(\lambda) = \int_{-4}^{\lambda} f(x)dx \times 4\ \text{cm}^2 = \int_{-4}^{\lambda} (x+4)e^{-\frac{x}{2}}dx \times 4\ \text{cm}^2 = \left(4e^2 - 2\lambda e^{-\frac{\lambda}{2}} - 12e^{-\frac{\lambda}{2}}\right) \times 4\ \text{cm}^2$$

2. *Calculons la limite de cette aire quand λ tend vers $+\infty$ ·* **$(0,5pt)$**

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \mathrm{A}(\lambda) = 4e^2 \times 4\ \text{cm}^2$$

3. *Interprétons géométriquement le résultat obtenu.* **$(0,5pt)$**

Cette limite représente l'aire du domaine non borné délimité par (C_f), l'axe des abscisses et la droite d`équation $x = -4$.