UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❐❐◆❐❐
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

22G21RA0145
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (04,5 points)

Dans le plan orienté $\mathbb{P}$, on considère un triangle non rectangle ABC, d'orthocentre H.
Soient $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle ABC, (C_1) le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (AB) et (C_2) le symétrique de $(\mathcal{C})$ par rapport à la droite (AC). On note O le centre de $(\mathcal{C})$, O_1 celui de (C_1) et O_2 celui de (C_2).

1. Montrer que (C_2) est l'image de (C_1) par une rotation R de centre A dont on précisera une mesure de l'angle. **0,5 pt**

2. Soit T le symétrique de H par rapport à la droite (AB).

a) Justifier que : $(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TC}) = -(\overrightarrow{HA},\overrightarrow{TC})\ [\pi]$. **0,25 pt**

b) Montrer que : $(\overrightarrow{TA},\overrightarrow{TC}) = (\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC})\ [\pi]$. **0,25 pt**

c) En déduire que T appartient à (C). **0,25 pt**

d) Démontrer que H appartient à $(C_1) \cap (C_2)$. **0,5 pt**

3. Soit M un point quelconque du cercle $(\mathcal{C})$, dont les symétriques respectifs par rapport aux droites (AB) et (AC) sont M_1 et M_2. Justifier les égalités suivantes :

a) $R(M_1) = M_2$ **0,5 pt**

b) $(\overrightarrow{HM_2},\overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_2M_2},\overrightarrow{O_2A})\ [\pi]$. **0,25 pt**

c) $(\overrightarrow{HM_1},\overrightarrow{HA}) = \frac{1}{2}(\overrightarrow{O_1M_1},\overrightarrow{O_1A})\ [\pi]$. **0,25 pt**

d) $(\overrightarrow{O_2M_2},\overrightarrow{O_2A}) = (\overrightarrow{O_1M_1},\overrightarrow{O_1A})\ [\pi]$. **0,25 pt**

4. En utilisant la question **3.**, montrer que les points H, M_1 et M_2 sont alignés. **0,5 pt**

5. Démontrer alors que les points M_1, M_2 et M_3 où M_3 est le symétrique de M par rapport à la droite (BC) sont alignés. **0,5 pt**

6. Démontrer que les points I, J et K, milieux respectifs des segments $[MM_1]$, $[MM_2]$ et $[MM_3]$, sont alignés. **0,5 pt**

EXERCICE 2 **(05 points)**

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O\ ;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

On considère les équations (E) : $3x - 2y = 8$ et (E') : $2x + 3y = 1$.

1.a) Montrer que le couple $(2\ ,-1)$ est solution de (E) et de (E'). **(0,25 pt)**

b) Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers relatifs solutions de l'équation (E). **(0,5 pt)**

c) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E'). **(0,5 pt)**

2. Soient (D) et (Δ) les droites d'équations respectives $y = \frac{3}{2}x - 4$ et $2x + 3y - 1 = 0$.

a) Montrer les points A_k de cordonnées $(2 + 2k\ ,-1 + 3k)$ avec k entier relatif sont les seuls points de (D) à coordonnées entières. **(0,5 pt)**

b) Démontrer que les points B_k de cordonnées $(3k' + 2\ ,-2k' - 1)$; $k' \in \mathbb{Z}$ sont les seuls points de (Δ) à coordonnées entières. **(0,5 pt)**

3.a) Existe-t-il deux entiers relatifs k et k' tels que $A_k = B_{k'}$?. **(0,25 pt)**

b) Déterminer les entiers relatifs k et k' tels que la droite $(A_kB_{k'})$ soit parallèle à l'axes des ordonnées. **(0,5 pt)**

c) Trouver l'entier q tels que : $\overrightarrow{A_{3q}B_{2q}} = 13\,\vec{\jmath}$. **(0,25 pt)**

4. Soit S la similitude plane directe qui transforme A_3 en B_2 et A_{-3} en B_{-2}

a) Déterminer l'image de la droite (D) par S. **(0,25 pt)**

b) En déduire le centre de la similitude S. **(0,25 pt)**

c) Démontrer que le triangle $A_3\ A_0B_2$ est rectangle. **(0,25 pt)**

d) Déterminer alors l'angle et le rapport de la similitude S. **(0,5 pt)**

e) Soit p un entier naturel non nul.
Donner la nature du quadrilatère $A_{3p}\ B_{2p}A_{-3p}\ B_{-2p}$. **(0,5 pt)**

PROBLEME **(10,5 points)**

Soit n un entier naturel non nul.

On appelle f_n la fonction définie par $f_n(x) = x^n e^{1-x}$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité graphique 2cm).

PARTIE A **(04,75 points)**

1. Déterminer le domaine de définition D_n de f_n puis calculer les limites aux bornes de D_n. **(0,75 pt)**

2. Prouver que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes dont on précisera les coordonnées. **(0,5 pt)**

3. Montrer que f_n est dérivable sur D_n , puis montrer que pour tout entier naturel n $(n > 1)$ et pour tout x de D_n, on a : $f_n'(x) = (n - x)f_{n-1}(x)$. **(0,25 pt + 0,5 pt)**

4. **a)** Etudier les variations de f_n (on distinguera deux cas, n pair et n impair). **(1 pt)**

b) Dresser le tableau de variations de f_n. **(0,5 pt)**

c) Etudier la position relative de C_n et de C_{n+1}. **(*0,5 pt*)**

d) Tracer dans le même repère les courbes C_1 , C_2 et C_3. **(0,75 pt)**

PARTIE B **(03,5 points)**

Pour tout entier naturel n, on définit la suite (I_n) par :

$I_0 = \int_0^1 e^{1-x}dx$ et $\forall\, n \geq 1\,,\; I_n = \int_0^1 f_n(x)\, dx.$

1. a) Calculer I_0 et I_1. **(0,5 pt)**

b) Démontrer que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $I_{n+1} = -1 + (n+1)I_n$. **(0,5 pt)**

c) En déduire I_2. **(0,25 pt)**

2. On note $\mathcal{A}_n$ l'aire (en unité d'aire) du domaine plan délimité par les courbes C_n et C_{n+1}, les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de n et de I_n. **(0,25 pt)**

3. Soit a un réel strictement supérieur à 1. On note S(a) l'aire (en unité d'aire) du domaine plan délimité par les courbes C_1 et C_2, et les droites d'équations $x = 0$ et $x = a$.

a) Montrer que : $S(a) = 24 - 4e - 4e^{1-a}(a^2 + a + 1)$. **(1 pt)**

b) L'objectif de cette question est de prouver qu'il existe une et une seule valeur de a pour laquelle il y a égalité entre $2\mathcal{A}_1$ et $S(a)$.

i) Montrer que $2\mathcal{A}_1 = S(a) \Leftrightarrow e^a = a^2 + a + 1$. **(0,5 pt)**

ii) En déduire l'existence et l'unicité du réel a. **(0,5 pt)**

PARTIE C **(02,25 points)**

1. Pour tout réel $x \in \mathbb{R}^*$, on pose $J_n(x) = \int_0^x f_n(t)$.

a) Calculer $J_1(x)$. **(0,25 pt)**

b) Donner une relation entre $J_{n+1}(x)$ et $J_n(x)$ **(0,5 pt)**

2. a) Démontrer par récurrence que $\forall\, n \geq 1, J_n(x) = n!\left(e - e^{1-x}\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}\right)$. **(1 pt)**

b) En déduire, pour n fixé, que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{n!}\int_0^x f_n(t)\, dt) = e$. **(0,5 pt)**