UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□♦□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E-mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

22T01AN01A20

Série : F6 – Coef. 4

Epreuve du 1e groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

EXERCICE 1 : **(04 points)**

Pour chacun des items ci-dessous, quatre réponses a, b, c et d sont proposées. Une seule de ces réponses est exacte. Pour répondre, écris le numéro de l'énoncé suivi de la lettre correspondant à ta réponse. Une réponse exacte est notée **0,5** point, la justification **0,5** point et une réponse inexacte ou une absence de réponse est notée 0.

N°	Enoncés	a	b	c	d
1	Dans le plan complexe muni du repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, on donne deux points distincts A(a) et B(b). Un argument de b-a en radians est égal à :			$(\vec{u};\overrightarrow{AB})$	
2	$\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2-x)e^x+1$ est egale à :				1
3	Soit f la fonction définie sur $]\mathbf{0},+\infty[$ par $f(x)=\ln x$. La primitive de f sur $]\mathbf{0},+\infty[$ qui s'annule en e est la fonction F définie sur $]\mathbf{0},+\infty[$ par F(x) égale à :	$x\ln x-x$			
4	$\int_{-1}^{2}\frac{3}{u-5}du$ est egale à :				$-\ln 8$

EXERCICE 2 **(05 points)**

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points R(1 ,2,7) , S(2, 0, 2) , T(3, 1, 3) , U(3, -6, 1) et V(4, -8, -4).

1. *Montrons que les points R, S et T déterminent un plan.* ***1 pt***

Il suffit de montrer que les points R, S et T ne sont pas alignés ; ce qui revient à montrer que les vecteurs $\overrightarrow{RS}$ et $\overrightarrow{RT}$ ne sont pas colinéaires.

On a : $\overrightarrow{RS}(1,-2,-5)$ et $\overrightarrow{RT}(2,-1,-4)$. Les vecteurs ne sont pas colinéaires, donc les points ne sont pas alignés.

2. Soient $\vec{u}(1, b, c)$ un vecteur de l'espace, b et c deux réels.

a) *Déterminons b et c tels que $\vec{u}$ soit normal au plan (RST) .* ***1 pt***

Le vecteur $\vec{u}$ est normal au plan (RST) $\Leftrightarrow \vec{u}\perp\overrightarrow{RS}$ et $\vec{u}\perp\overrightarrow{RT}$

$\Leftrightarrow 1-2b-5c=0$ et $2-b-4c=0$.

$\Leftrightarrow b=-2$ et $c=1$.

b) *Déduisons-en une équation cartésienne du plan (RST).* ***1 pt***

Le plan (RST) a pour équation : $x-2y+z+d=0$ où d est un réel à déterminer.

Le point S(2, 0, 2) apparient à ce plan, donc $2-2\times0+2+d=0$. Ce qui donne $d=-4$.

Le plan (RST) a pour équation : $x-2y+z-4=0$

c) *Le point U appartient-il au plan (RST) ? Justifions notre réponse.* ***0,5 pt***

On a : $3-2\times(-6)+1-4=12\neq0$. On en déduit que U n'appartient pas au plan (RST).

3. Soit (L) la droite dont un système d'équations paramétriques est : $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 5 - 4t \\ z = -1 + 2t \end{cases}$; $(t \in \mathbb{R})$.

a) Montrons que la droite (L) est-elle orthogonale au plan (RST) . **0,5 pt**

Le vecteur $\vec{v}(2, -4, 2)$ est un vecteur directeur de (L). Il est colineaire a $\vec{u}$. Par conséquent, la droite (L) est orthogonale au plan (RST).

b) Déterminons les coordonnées du point A, intersection de la droite (L) et du plan (RST). **0,5 pt**

Le paramètre t de ce point vérifié : $(3 + 2t) - 2(5 - 4t) + (-1 + 2t) - 4 = 0$; ce qui donne : $t = 1$.

Le point a pour coordonnées $(5\,,1\,,1)$.

4. *Montrons que la droite (UV) est parallèle au plan (RST).* **0,5 pt**

Il suffit de montrer que le vecteur $\overrightarrow{UV}$ est orthogonal au vecteur $\vec{u}$.

On a $\overrightarrow{UV}(1\,,-2\,,-5\,)$ et $\vec{u}\left(1\,,-2\,,1\,\right)$. $\overrightarrow{UV} \cdot \vec{u} = 1 \times 1 + (-2) \times (-2) + (-5) \times 1 = 1 + 4 - 5 = 0$.

PROBLEME **(11 points)**

PARTIE A **(03,5 points)**

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 + 2x^2 - 1$.

1. Etablir le tableau de variations de g. **2 pts**

$$g'(x) = 6x^2 + 4x = 2x(3x + 2)$$

x	$-\infty$		$-\frac{2}{3}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$		$-$		$+$	
g	$-\infty$	↗		↘		↗	$+\infty$

$$g\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{19}{27} \text{ et } g(0) = -1$$

2. *Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α et que $0,\mathbf{5} < \alpha < 0,\mathbf{6}$ ·* ***1 pt***

- $g\left(\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[\right) = \left]-\infty,-\frac{19}{27}\right[$; l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left]-\infty,-\frac{2}{3}\right[$
- $g\left(\left[-\frac{2}{3}\,,0\right]\right) = \left[-1\,,-\frac{19}{27}\right]$; l'équation $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $\left[-\frac{2}{3}\,,0\right]$.
- Sur $]0\,,+\infty\,[$, g est continue et strictement croissante ; elle réalise une bijection de $]0\,,+\infty\,[$ vers $]-1\,,+\infty\,[$. Or, $0 \in\,]-1\,,+\infty\,[$, donc l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $]0\,,+\infty\,[$.

  En définitive, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

  De plus, $g(\text{-}0,\mathbf{5}) = -0{,}25 < 0$ et $g(\text{-}0,\mathbf{6}) = 0{,}5 > 0$; donc $0,\mathbf{5} < \alpha < 0,\mathbf{6}$ ·

3. *Déterminons alors le signe de g(x) sur $\mathbb{R}$.* ***0,5 pt***

Sur $]-\infty\,,\alpha\,[$, $g(x) < 0$; Sur $]\alpha\,,+\infty\,[$, $g(x) > 0$ et $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$.

PARTIE B **(07,5 points)**

Soit f la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) + x^2$.

On note $\left(C_f\right)$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$ d'unité 1 cm.

1. *a) Calculons la limite de f en 0^+ puis interpréter géométriquement le résultat.* ***0,5 pt + 0,5 pt***

On a : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; donc la droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C_f).

b) *Calculons la limite de f en $+\infty$ puis étudier la branche infinie de (C_f) en $+\infty$.* **0,5 pt + 0,5 pt**

On a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$; donc (C_f) admet une branche parabolique de direction $\vec{\jmath}$.

2. *Justifions que f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ et que pour tout x de cet intervalle, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^2+x}$.* ***0,5 pt + 1 pt***

La fonction f est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ car c'est une somme de composés de fonctions dérivables et pouur tout réel x strictement positif, $f'(x) = \frac{2x^3+2x^2-1}{x^2+x} = \frac{g(x)}{x^2+x}$

3. Dressons le tableau de variation de f. **1 pt**

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$+$
f	$+\infty$ ↘		↗ $+\infty$

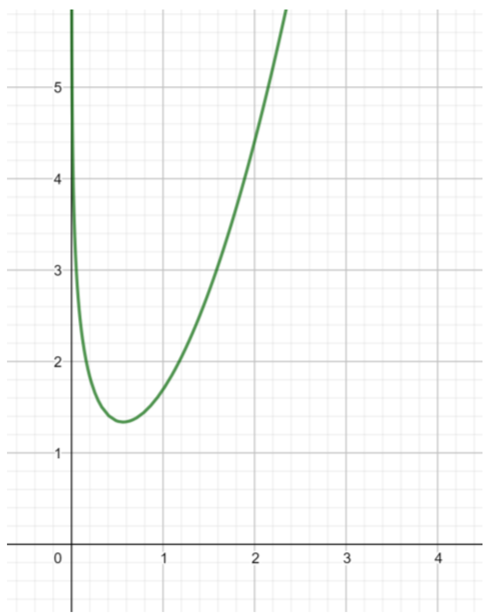
4. *a) Montrons que $1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha^3}$.* ***0,5 pt***

On a : $g(\alpha) = 0$, donc $2\alpha^3 + 2\alpha^2 - 1 = 0$. On en déduit que $1 + \frac{1}{\alpha} = \frac{1}{2\alpha^3}$

b) Déduisons-en que $f(\alpha) = \alpha^2 - \ln 2 - 3\ln\alpha$. **0,5 pt**

On a : $f(\alpha) = \ln\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right) + \alpha^2 = \ln\left(\frac{1}{2\alpha^3}\right) + \alpha^2 = \alpha^2 - \ln 2 - 3\ln\alpha$

c) Construisons (C_f). ***1 pt***



d) Montrons que la fonction F définie sur $]0\,,+\infty[$ par $F(x) = (x+1)\ln(x+1) - x\ln x + \frac{1}{3}x^3$ est une primitive de f sur $]0\,,+\infty[$ · **0,5 pt**

Sur $]0\,,+\infty[$ $F'(x) = \left[(x+1)\ln(x+1) - x\ln x + \frac{1}{3}x^3\right]' = \ln(x+1) + 1 - \ln(x) - 1 + x^2 = f(x)$.

e) Calculons en cm^2 l'aire de la surface délimitée par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$. ***0,5 pt***

Soit $\mathcal{A}$ cette aire.

$$\mathcal{A} = \int_1^e f(x)dx \times 1\text{cm}^2 = (F(e) - F(1)) \times 1\text{cm}^2 = \cdots$$