OFFICE DU BACCALAUREAT

E-mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2023GS21RA0124
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (05 points)

Soit a et b deux entiers naturels non nuls ; on appelle « réseau » associé aux entiers a et b, ce qu'on note $R_{a,b}$, l'ensemble des points du plan muni d'un repère, dont les cordonnées (x,y) sont des entiers naturels vérifiant les conditions : $0 \leq x \leq a$ et $0 \leq y \leq b$.

1. **a)** Déterminer le nombre d'éléments du réseau $R_{4,5}$. **0,5 pt**
   b) Donner tous les points $M(x,y)$ du réseau $R_{8,8}$ vérifiant : $x \equiv 2\,[3]$ et $y \equiv 1[3]$. **0,5 pt**
   c) Déterminer les points $M(x,y)$ du réseau $R_{5,5}$ vérifiant : $x \equiv y\,[3]$. **0,5 pt**
2. On considère l'équation (E) : $7x - 4y = 1$ où x et y sont des entiers relatifs.
   a) Déterminer un couple d'entiers relatifs (x_0, y_0) solution de (E). **0,25 pt**
   b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, l'équation (E). **0,5 pt**
   c) Démontrer que l'équation (E) admet une unique solution (x,y) pour laquelle le point $M(x,y)$ correspondant appartient au réseau $R_{4,7}$. **0,5 pt**
3. On donne $A(a,b)$ et $O(0,0)$.
   a) Démontrer que les points $M(x,y)$ du segment $[OA]$ sont caractérisés par :
   $0 \leq x \leq a$; $0 \leq y \leq b$ et $ay = bx$. **0,5 pt**
   b) Démontrer que si a et b sont premiers entre eux, alors les points A et O sont les seuls points du segment $[OA]$ appartenant au réseau $R_{a,b}$. **0,75 pt**
   c) Démontrer que si a et b ne sont pas premiers entre eux, alors le segment $[OA]$ contient au moins un autre point du réseau $R_{a,b}$. **1 pt**
   (On pourra utiliser le PGCD d des nombres a et b et poser $a = da'$ et $b = db'$).

EXERCICE 2 : (05 points)

Dans le plan, on considère un triangle OAB et S une similitude plane directe de centre O, de rapport λ et d'angle θ.

Soient A' et B' les images respectives des points A et B par la similitude S.

Les points I, J et K sont les milieux respectifs des segments $[A'B]$, $[AB']$ et $[AA']$.

Le point H est le projeté orthogonal du point O sur la droite (AB) et le point H' est l'image du point H par la similitude S.

PARTIE A :

Dans cette partie, le plan complexe est muni d'un repère $(O,\vec{u},\vec{v})$. Le point A a pour affixe $-6+4i$, le point B a pour affixe $2+4i$, $\lambda=\frac{1}{2}$ et $\theta=\frac{\pi}{2}$.

1. Montrer que H a pour affixe $4i$. **0,5 pt**
2. Déterminer les affixes des points A', B' et H'. **0,5 pt**
3. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH'). **0,5 pt**

PARTIE B :

Dans cette partie, $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$ et $\theta\in\mathbb{R}$.

1. **a.** Montrer que H' est le projeté orthogonal du point O sur la droite $(A'B')$. **0,5 pt**

   b. Montrer que $\overrightarrow{KI}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{KJ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B'}$. **0,5 pt**

   c. En déduire que $\frac{KJ}{KI}=\frac{OH'}{OH}$ et que : $\left(\overrightarrow{KI},\ \overrightarrow{KJ}\right)=\left(\overrightarrow{OH},\ \overrightarrow{OH'}\right)[2\pi]$. **0,5 pt**

2. Soit T la similitude plane directe qui transforme K en O et I en H. On note N l'image de J par la similitude T.
   a. Montrer que $ON=OH'$, puis que $\left(\overrightarrow{ON},\ \overrightarrow{OH'}\right)=0\ [2\pi]$. **0,5 pt**
   b. En déduire que le point H' est l'image du point J par la similitude T. **0,5 pt**
3. Montrer que $\left(\overrightarrow{IJ},\ \overrightarrow{HH'}\right)=\left(\overrightarrow{KI},\ \overrightarrow{OH}\right)[2\pi]$. **0,5 pt**
4. Montrer que la droite (IJ) est perpendiculaire à la droite (HH'). **0,5 pt**

PROBLEME : **(10 points)**

PARTIE A **(01,5 pt)**

Soit g la fonction définie par : $g(x)=1-\frac{2}{x}+\ln(-x)$.

1. Déterminer le domaine de définition Dg de la fonction g puis calculer les limites aux bornes de Dg. **0,75 pt**
2. Dresser le tableau de variation de g. **0,5 pt**
3. Préciser le signe de g sur $]-\infty\,,0[$. **0,25 pt**

PARTIE B **(02 pts)**

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ par : $f(x)=\begin{cases}(x-2)\ln(-x) & \text{si } x<0\\ \ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{1+x} & \text{si } x>0\end{cases}$

1. Justifier que f est dérivable sur $]-\infty\,,0[$ et montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $]-\infty\,,0[$, $f'(x)=g(x)$. **0,5pt**
2. Etudier les variations de la fonction f sur $]0\,,+\infty[$. **0,5 pt**
3. Tracer la courbe de f dans le plan muni d'un repère $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **1 pt**

PARTIE C **(02,5 pts)**

1. Montrer que pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

$$\int_1^t x \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \geq \int_1^t \frac{x}{x+1} dx \qquad [\mathbf{1}]$$ **0,5 pt**

2. Soit h la fonction définie sur $]0\,,+\infty\,[$ par : $h(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$. **0,5 pt**

a. Calculer $h'(x)$ et en déduire une primitive de f sur $]0\,,+\infty\,[$. **0,5 pt**

b. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine limité par la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = \alpha\,, x = \beta\,,\ \ 0 < \alpha < \beta$. 0,5 pt

3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$S_n = \ln\left(1+\frac{1}{1}\right) + 2\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) + \cdots + n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Montrer que pour tout entier naturel n non nul, on a :

$$S_n \geq \int_1^n x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right) dx \qquad [\mathbf{2}]$$ **0,5 pt**

PARTIE D **(01,5 pt)**

1. Montrer que pour tout réel strictement positif, $\ln a \leq a - 1$. **0,5 pt**

2. Soient $x_1, x_2, \cdots, x_n$ n réels strictement positifs où n est un entier supérieur ou égal à 2.

Montrer que : $\frac{1}{n}(\ln x_1 + \ln x_2 + \cdots + \ln x_n) \leq \ln\left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)$. $[\mathbf{3}]$ **0,5 pt**

Indication : Utiliser la question **D.1** avec $a_i = \frac{x_i}{\frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)}$, i entier de 1 à n.

3. Montrer que l'inégalité $[\mathbf{3}]$ est équivalente à : $x_1 x_2 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\right)^n$. **0,5 pt**

PARTIE E **(02,5 pts)**

Soient (U_n) et (V_n) les suites respectivement définies pour tout entier naturel supérieur ou égal à 1 par :

$$U_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{et} \quad V_n = \frac{U_1 + U_2 + \cdots + U_n}{n}$$

1. Montrer que les suites $\left(\ln(U_n)\right)$ et (U_n) sont croissantes, convergentes et que leurs limites respectives sont 1 et e.

En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1, V_n \leq e$. **1 pt**

2. En utilisant les inégalités $[\mathbf{1}]$, $[\mathbf{2}]$ et $[\mathbf{3}]$, montrer que pour tout entier naturel n non nul,

$(\ln V_n) \geq \frac{1}{n}\int_1^n \frac{x}{x+1} dx$ **0,5 pt**

3. Calculer l'intégrale $W_n = \int_1^n \frac{x}{x+1} dx$. **0, 5pt**

Indication : $\frac{x}{1+x} = \frac{x+1-1}{1+x}$.

4. Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\frac{1}{n}W_n \leq \ln V_n \leq 1$.

En déduire que (V_n) est convergente et donner sa limite. **0,5 pt**