UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□◆□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
Email : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2023GS26RB0132
Durée : 2 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

Soient $r \in \mathbb{R}_+^*$, $\alpha \in]-\pi, \pi[$ et (E) est l'équation d'inconnue complexe z : $z^2 - (2r\cos\alpha)\,z + r^2 = 0$.

1. a. Montrer que (E) admet deux solutions z_1 et z_2 puis déterminer ces solutions. **(01,5 pt)**
   b. Préciser le module et l'argument de chacune de ces solutions de (E). **(01,5 pt)**
2. a. Donner la forme exponentielle de z_1 et de z_2. (0,5 pt)
   b. En déduire la forme exponentielle de z_1^n et z_2^n, $n \in \mathbb{N}^*$. **01 pt)**
   c. On pose $P_n = z_1^n + z_2^n$.
   Montrer que $P_n = 2\,r^n\cos(n\alpha)$. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

1. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'' - 3\,y' + 2\,y = 0$. **(01 pt)**
2. Soit (E') l'équation différentielle : $y'' - 3\,y' + 2\,y = 2\,x + 1$.
   On pose $h\,(x) = ax + b$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b pour que h est solution de (E'). **(02 pts)**
3. Soit g une fonction deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
   a. Montrer que g est solution de (E') si et seulement si $g - h$ est solution de (E). **(01,5 pt)**
   b. En déduire l'ensemble des solutions de (E'). **(0,5 pt)**

EXERCICE 3 (04 points)

On rappelle que deux événements U et V sont indépendants si $p(U \cap V) = p(U)p(V)$.
A et B sont deux événements : tels que $p(A) \neq 0$, $\overline{B}$ est l'événement contraire de B et $p_A\,(B)$ est la probabilité de B sachant A. On suppose que les événements A et B sont indépendants.

1. Montrer que $p_A\,(B) = p(B)$. **(01 pt)**
2. a. Montrer que $p(A \cap \overline{B}) = p(A) - p(A \cap B)$ · **(01,5 pt)**
   b. En déduire que : $p(A \cap \overline{B}) = p(A)\,p(\overline{B})$ · **(01 pt)**
3. Les événements A et $\overline{B}$ sont-ils indépendants ? Justifier votre réponse. **(0,5 pt)**

EXERCICE 4 (06 points)

Soient (U_n) et (V_n) deux suites numériques définies par :

$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_1 = 1 \\ U_{n+2} = 5U_{n+1} - 6U_n \end{cases} \quad \text{et } V_n = U_{n+1} - 3U_n,\ n \in \mathbb{N}.$$

1. Calculer U_2 et U_3. **(01 pt)**
2. Montrer que la suite (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique. **(01 pt)**
3. Montrer que (V_n) est une suite géométrique puis exprimer V_n en fonction de n. **(01,5 pt)**
4. On pose $W_n = U_{n+1} - 2U_n$, $n \in \mathbb{N}$.
   Montrer que (W_n) est une suite géométrique puis exprimer W_n en fonction de n. **(01,5 pt)**
5. a. Exprimer U_n en fonction de n. **(0,5 pt)**
   b. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} U_n$. **(0,5 pt)**