RSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2023TSTEG37RA0112
Durée : 4 heures
Série : STEG – Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 **(05 points)**

Soit $a \in \mathbb{R}$ et M la matrice définie par : $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Déterminer a pour que le déterminant de M soit égal à -3. **(0.5 point)**
2. Pour $a = 2$, montrer que M est inversible puis déterminer sa matrice inverse M^{-1} par la méthode des cofacteurs. **(0.5 + 2 points)**
3. Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ par la méthode du pivot de Gauss le système suivant :
$$\begin{cases} 2x + z - 5 = 0 \\ y + 2z = 8 \\ -x + y = 1 \end{cases}$$ **(01.5 point)**
4. Retrouver la solution de ce système par la méthode matricielle. **(0.5 point)**

EXERCICE 2 **(05 points)**

Un emprunt est remboursable au moyen de 20 amortissements mensuels constants sachant que la première et la dernière mensualité sont respectivement 600 000 F CFA et 220 000 F CFA.

1. Calculer l'amortissement constant. **(01,5 point)**
2. Calculer le montant de la dette. **(01 point)**
3. Calculer le taux d'intérêt mensuel. **(01 point)**
4. Dresser la première et la dernière ligne du tableau des amortissements. **(01,5 point)**

PROBLEME **(10 points)**

PARTIE A

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = -1 + x^3 + 2\ln x$.

1. Etudier les variations de g. **(01 point)**
2. Calculer $g(1)$. En déduire le signe de $g(x)$ pour $x \in]0; +\infty[$. **(0.25 + 0.5 point)**
3. a) Démontrer que g est une bijection de $]0, +\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0.75 point)**

   b) Justifier que la bijection réciproque g^{-1} de g est dérivable en 0 puis calculer $(g^{-1})'(0)$. **(0.25 + 0.5 point)**

PARTIE B

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par: $f(x) = x + 2 - \frac{\ln x}{x^2}$ et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$ (unité : $1\ \mathrm{cm}$).

1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition. **(0.5 + 0.25 point)**
2. Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0,+\infty[$, $f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$. **(01 point)**
3. En déduire le signe de $f'(x)$ pour $x \in\ ]0\ ,+\infty[$ **(0.5 point)**
4. Dresser le tableau de variation de f. **(0.75 point)**
5. a) Montrer que la droite $(D) : y = x + 2$ est une asymptote oblique à (Cf) en $+\infty$. **(0.25 point)**

   b) Etudier la position relative de (Cf) par rapport à (D) . **(0.5 point)**
6. Tracer (Cf). **(01 point)**
7. Soit h la fonction définie sur $]0\ ,1[$ par $h(x) = f(x)$.

   a) Montrer que h est une bijection de $]0\ ,1[$ vers un intervalle K à préciser. **(0.25 + 0.25 point)**

   b) Soit h^{-1} la bijection réciproque de h.
   Tracer la courbe (Ch^{-1}) de h^{-1} dans le plan muni du repère $(O\ ;\ \vec{i},\vec{j})$. **(0.75 point)**
8. En utilisant une intégration par parties, calculer l'aire $\mathcal{A}$ en cm^2 du domaine $\mathcal{D}$ défini par :
   $\mathcal{D} = \{M(x,y) \text{ tels que } e \leq x \leq e^2 \text{ et } f(x) \leq y \leq x + 2\}$. **(0.75 point)**