UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❐❐◆❐❐
OFFICE DU BACCALAUREAT
E-mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2024GS21NA0124
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

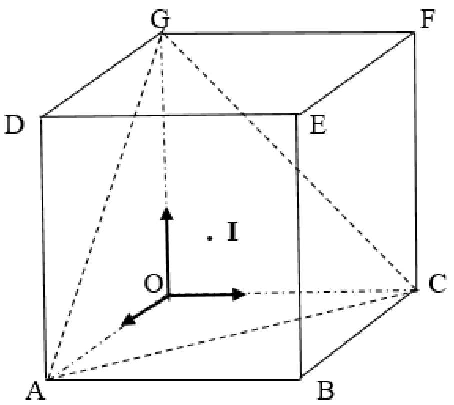
MATHEMATIQUES

CORRIGE

EXERCICE 1 : (04 points)

Dans l'espace, on considère 8 points O, A, B, C, D, E, F et G tels que $OABCGDEF$ soit un cube d'arête une unité.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(O\,;\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OG}\right)$.



1. Donner les coordonnées des points A, C, G et E.

$A(1;0;0)$, $C(0;1;0)$ et $G(0;0;1)$

$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OG}$, d'où $E(1,1,1)$. **1 pt**

2. a) Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AC}$

On a : $\overrightarrow{AG}(-1;0;1)$ et $\overrightarrow{AC}(-1;1;0)$.

Donc, $\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AC}\,(-1,-1,-1)$. **0,5 pt**

b) En déduire une équation cartésienne du plan (AGC).

Soit $M(x, y, z) \in (ACG) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$

$\Leftrightarrow x + y + z - 1 = 0.$

Le plan (AGC) a pour équation : $x + y + z - 1 = 0$ **0,25 pt**

3. Montrer que la droite (OE) est perpendiculaire au plan (AGC).

On a : $\overrightarrow{OE} = -\left(\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AC}\right)$

Donc, le vecteur $\overrightarrow{OE}$ est normal au plan (AGC).

Par conséquent la droite (OE) et perpendiculaire au plan (AGC). **0,25 pt**

Commentaire : D'autres méthodes, analytiques comme géométriques, sont possibles. Par conséquent, il faudra tenir, dans l'appréciation des copies, de la démarche, du raisonnement et de la justesse des résultats

4. Déterminer les coordonnées du point I intersection de la droite (OE) et du plan (AGC).

La droite (OE) a pour représentation paramétrique : $\begin{cases} x = t \\ y = t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = t \end{cases}$

$I \in (OE)$, donc $I(\alpha, \alpha, \alpha)$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ de plus $I \in (AGC)$, $3\alpha - 1 = 0$, d'où $\alpha = \frac{1}{3}$.

Par suite $I\left(\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\,,\,\frac{1}{3}\right)$. **0,25 pt**

5. Calculer alors le volume du tétraèdre $OAGC$.

Le volume du tétraèdre est : $V_{OAGC} = \frac{1}{6} IO \times \|\overrightarrow{AG} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \frac{1}{6}$. **0,5 pt**

6. On note (P) et (P') respectivement les plans médiateurs de $[AC]$ et de $[CG]$ et on note s et s' les réflexions par rapport respectivement aux plans (P) et (P').

a) Déterminer $(s' \circ s)(A)$.

$s(A) = C$, $s'(C) = G$ donc $s'os(A) = G$. **0,5 pt**

b) Démontrer que $s' \circ s$ est une rotation d'axe (OI). **0,25 pt**

L'application $s' \circ s$ est la composée de deux réflexions de plans sécants, donc $s' \circ s$ est une rotation.
D'autre part I est le centre de gravité du triangle équilatéral AGC, donc I appartient au plan médiateurs $[AC]$ et $[CG]$. Par suite $s' \circ s$ est une rotation d'axe (OI) . **0,25 pt**

c) Soit θ son angle, déterminer $|\theta|$.

On a : $I \in (OI)$, donc $s'os(I) = I$.
De plus, la droite (OI) est perpendiculaire au plan (AGC) et $I \in (AGC)$. On en déduit que

$$|\boldsymbol{\theta}| = \left|\left(\overrightarrow{\boldsymbol{IA}}, \overrightarrow{\boldsymbol{IG}}\right)\right| = \frac{2\pi}{3}.$$ **0,25 pt**

EXERCICE 2 : (05 points)

1. On considère les nombres $a = 57370$ et $b = 104275$

a) Déterminer le PGCD de a et b.

En utilisant l'algorithme d'Euclide, on a :

$$\text{PGCD}(a, b) = 5$$ **0,5 pt**

b) L'équation $ax + by = 5$ admet-elle des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$?

$\text{PGCD}(a, b)$ divise 5 , donc l'équation $ax + by = 5$, admet des solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. **0,25 pt**

2. Soit **(E)** l'équation **:** $11474x + 20855y = 1$.

a) Vérifier que le couple $(3059 , -1683)$ est solution de l'équation **(E)**.

On a : $11474 \times 3059 + 20855(-1683) = 35098966 - 35098965 = 1$.
Donc le couple $(3059; -1683)$ est une solution de l'équation **(E)**. **0,25 pt**

b) Résoudre dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation **(E)**.

$$\begin{cases} 11474x + 20855y = 1 \\ 11474 \times 3059 + 20855(-1683) = 1 \end{cases}$$

$11474(x - 3059) = 20855(-y - 1683)$

$11474(x - 3059) = 20855(-y - 1683) \quad (*)$

20855 divise $11474(x - 3059)$ de plus 20855 et 11474 sont premiers entre eux , donc d'après le théorème de Gauss 20855 divise $(x - 3059)$. Il existe un entier k tel que : $x - 3059 = 20855k$,

$\boldsymbol{x = 3059 + 20855k}$

$(*)$, $11474(\boldsymbol{3059 + 20855k} - 3059) = 20855(-y - 1683)$

$-y - 1683 = 11474k$, $\boldsymbol{y = -1683 - 11474k}$. **0,25 pt**

Vérification

(E) : $11474x + 20855y = 11474(3059 + 20855k) + 20855(-1683 - 11474k)$

$35098966 - 35098965 = 1$.

$S = \{(\boldsymbol{3059 + 20855k} ; \boldsymbol{-1683 - 11474k})\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. **0,25 pt**

c) En déduire les solutions dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ de l'équation $ax + by = 5$.

$$ax + by = 5 \Leftrightarrow 57370x + 104275y = 5$$
$$\Leftrightarrow 11474x + 20855y = 1$$

$S = \{(\boldsymbol{3059 + 20855k} ; \boldsymbol{-1683 - 11474k})\}$ avec $k \in \mathbb{Z}$. **0,5 pt**

3. Pour chacune des propositions suivantes, dire si elle est vraie ou fausse : **0,25 pt× 4 =1 pt**

P_1 : Dans la base p où p est un entier naturel supérieur ou égal à 2, $p-1$ est un chiffre. **Vrai**

P_2 : Dans la base 7, 8 est un chiffre. **Faux**

P_3 : Dans la base 16, E est un chiffre. **Vrai**

P_4 : Dans la base 8, les chiffres utilisés sont : 0; 1; 2 ; 3; 4; 5; 6; 7. **Vrai**

4. Deux commerçantes Anta et Fatou se rendent au marché pour acheter des articles.
Un article coûte 5 francs l'unité.
Anta et Fatou disposent respectivement d'un montant de S_1 et de S_2 en francs.

On sait que $S_1 = 1x00y2$ en base huit, et $S_2 = x1y003$ en base sept.

a) Donner, en fonction de x et y les expressions de S_1 et de S_2 en base dix.

- $S_1 = \overline{1x00y2}^{\ 8} = 1 \times 8^5 + x \times 8^4 + 0 \times 8^3 + 0 \times 8^2 + y \times 8^1 + 2$

  $\boldsymbol{S_1 = 4096x + 8y + 32770}$. **0,25 pt**
- $S_2 = \overline{x1y003}^{\ 7} = x \times 7^5 + 1 \times 7^4 + y \times 7^3 + 0 \times 7^2 + 0 \times 7^1 + 3$

  $\boldsymbol{S_2 = 16807x + 343y + 2404}$ **.** **0,25 pt**

b) Déterminer les chiffres x et y pour que chacune des deux commerçantes puisse dépenser tout le montant à sa disposition.

Cela signifie : $\begin{cases} S_1 \equiv 0[5] \\ S_2 \equiv 0[5] \end{cases}$ **0,25 pt**

$\begin{cases} S_1 \equiv 0[5] \\ S_2 \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4096x + 8y + 32770 \equiv 0[5] \\ 16807x + 343y + 2404 \equiv 0[5] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 3y \equiv 0\{5\} \\ 2x + 3y + 4 \equiv 0\{5\} \end{cases}$

$\begin{cases} x + 3y \equiv 0\{5\} \\ 2x + 3y \equiv -4\{5\} \end{cases}$ **0,25 pt**

En faisant la différence membre en membre on obtient $x \equiv -4[5]$

Il existe un entier k tel que $x = -4 + 5k$

Or $0 \le x \le 6$, $0 \le -4 + 5k \le 6$, $\frac{4}{5} \le k \le \frac{10}{5}$, $k = 1$ ou $k = 2$.

Par suite $x = 1$ ou $x = 6$

D'autre par $x \equiv -4[5] \Rightarrow 3y \equiv 4\{5\} \Rightarrow y \equiv 8\{5\}$

Il existe un entier k' tel que : $y = 8 + 5k'$

$0 \le y \le 6$, $0 \le 8 + 5k \le 6$, , $-\frac{8}{5} \le k' \le -\frac{2}{5}$, $k = -1$

On obtient $\boldsymbol{x = 6}$ et $\boldsymbol{y = 3}$ **0,5 pt**

c) En déduire le nombre d'articles que chacune d'elles pourra acheter.

$S_1 = 4096x + 8y + 32770 = 4096 \times 6 + 8 \times 3 + 32770 = 57370$

$\boldsymbol{S_1 = 57370}$

$S_2 = 16807x + 343y + 2404 = 16807 \times 6 + 343 \times 3 + 2404 = 104275$

$\boldsymbol{S_2 = 104275}$

Par suite

Le nombre d'articles de Anta est de $N_1 = \frac{S_1}{5} = \frac{57370}{5} = 11474$. **0,25pt**

Le nombre d'article de Fatou est de $N_2 = \frac{S_2}{5} = \frac{104275}{5} = 20855$. **0,25 pt**

PROBLEME **(11 points)**

PARTIE A (5,5 points)

Soit n un entier naturel. On considère la fonction f_n définie par :

$$f_n(x) = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \times \sqrt{2 - e^x}$$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
L'unité graphique est 4 cm.

1. Déterminer le domaine de définition de f_n, puis calculer les limites aux bornes de cet ensemble.

- $\boldsymbol{D_f =]-\infty, \ln 2]}$ **0,25 pt**
- $\boldsymbol{\lim_{x\to-\infty} f_n(x) = 0}$. **0,25 pt**
- $\boldsymbol{\lim_{x\to(\ln 2)^-} f_n(x) = 0}$. **0,25 pt**

2. Montrer que toutes les courbes C_n passent par deux points fixes que l'on déterminera.

On cherche tous les points $M(x,y)$ avec $x \leq \ln 2$ et $y \geq 0$ tels que : $\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = y$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, f_n(x) = y \Leftrightarrow e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \times \sqrt{2 - e^x} = y\ (*)$$

- Si $2 - e^x = 0$, c'est-à-dire $x = \ln 2$, alors $y = 0$.
- Si $2 - e^x > 0$, c'est-à-dire $x > \ln 2$, alors $y > 0$.

En prenant le logarithme de chaque membre de $(*)$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \left(n + \frac{1}{2}\right)x + \frac{1}{2}\ln(2 - e^x) = \ln y$$

Ce qui équivaut à :

$$\forall n \in \mathbb{N}, xn + \frac{1}{2}\left(x + \ln(2 - e^x)\right) - \ln y = 0$$

Etant donné qu'un polynôme (en n) est nul ssi tous ses coefficients sont nuls, on obtient :

$$x = 0 \text{ et } \frac{1}{2}\left(x + \ln(2 - e^x)\right) - \ln y = 0$$

Ce qui donne : $x = 0$ et $y = 1$

On a donc deux points fixes qui sont : $A(0,1)$ et $B(\ln 2, 0)$. **0,5 pt**

Commentaires :
Il faudra tenir, dans l'appréciation des copies, de la démarche, du raisonnement et de la justesse des résultats

3. Etudier les positions relatives des courbes C_{n+1} et C_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Soit n un entier naturel

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{\left(n+\frac{3}{2}\right)x} \times \sqrt{2 - e^x} - e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \times \sqrt{2 - e^x}$$

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \times \sqrt{2 - e^x}\,(e^x - 1)$$

- Si $x \in]-\infty, 0]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq 0$; la courbe C_{n+1} est en dessous de la courbe C_n sur $]-\infty, 0]$.
- Si $x \in [0, \ln 2]$, $f_{n+1}(x) - f_n(x) \geq 0$; la courbe C_{n+1} est au-dessus de la courbe C_n sur $[0, \ln 2]$.

0,5 pt

4. Etudier les variations de f_n. **0,5 pt**

Pour tout entier naturel n, la fonction f_n est dérivable sur $]-\infty, \ln 2[$

$$\forall x \in]-\infty, \ln 2[,\ f_n'(x) = \left(n + \frac{1}{2}\right)e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x} \times \sqrt{2 - e^x} - \frac{e^x}{2\sqrt{2 - e^x}} \times e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$$

$$= \frac{(2n+1)(2 - e^x) - e^x}{2\sqrt{2 - e^x}} \times e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}$$

$$= \boldsymbol{\frac{4n + 2 - 2(n+1)e^x}{2\sqrt{2 - e^x}} \times e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}$$

0,25 pt

$$f_n'(x) \geq 0 \iff 4n+2-2(n+1)e^x \geq 0$$
$$\iff x \leq \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$$

- Si $x \in \left]-\infty\,,\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\right]$, $f_n'(x) \geq 0$, par suite f_n est croissante sur $\left]-\infty\,,\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\right]$
- Si $x \in \left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\,,\ln 2\right[$, $f_n'(x) \leq 0$, par suite f_n est décroissante sur $\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\,,\ln 2\right[$.

0,25 pt

5. Montrer que f_n admet un maximum α_n puis exprimer α_n en fonction de n.

La fonction f_n est croissante sur $\left]-\infty\,,\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\right]$ et décroissante sur $\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\,,\ln 2\right[$.

Elle admet donc un maximum en $\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$.

$$f_n\left(\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)\right) = e^{\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)} \times \sqrt{2-\frac{2n+1}{n+1}}$$
$$= \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{n+1}}$$

On a donc

$$\boldsymbol{\alpha_n = \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{n+1}}}$$

0,5 pt

6. Dresser le tableau de variations de f_n .

x	$-\infty$		$\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$		$\ln 2$
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	α_n	$\searrow$	0

0,5 pt

7. Tracer les courbes C_1, C_2 et C_3.

1,5 pt

8. Soient (U_n) et (V_n) les suites définies pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $U_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$ et $V_n = f_n(U_n)$.

a) Déterminer la limite de U_n.

$U_n = \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) = \ln 2$,

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{U_n} = \mathbf{ln2}\ .$$

0,25 pt

b) Calculer la limite de $\ln(V_n)$ et en déduire celle de V_n.

$$\ln(V_n) = \ln\left(\left(\frac{2n+1}{n+1}\right)^{\left(n+\frac{1}{2}\right)} \times \sqrt{\frac{1}{n+1}}\right) = \left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\ln(n+1)$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{\frac{1}{2}\ln(n+1)}{n+\frac{1}{2}}\right]$$

$$= \left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\times\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right]$$

$$\lim_{n\to+\infty}\ln(V_n) = \lim_{n\to+\infty}\left(\left(n+\frac{1}{2}\right)\left[\ln\left(\frac{2n+1}{n+1}\right) - \frac{1}{2}\times\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}}\times\frac{\ln(n+1)}{n+1}\right]\right)$$

$$= +\infty$$

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{ln}(\boldsymbol{V_n}) = +\infty$$

0,25 pt

$\lim\limits_{n\to+\infty} ln(V_n) = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = +\infty$ **.**

$$\lim_{n\to+\infty} \boldsymbol{V_n} = +\infty$$

0,25 pt

PARTIE B (3,25 points)

Soit φ la fonction définie sur $]0\,,2[$ par : $\varphi(t) = \sqrt{t(2-t)}$

1. Montrer que $\varphi(e^t) = f_0(t)$.

$\varphi(e^t)$ existe $\Leftrightarrow 0 < e^t < 2$

$\Leftrightarrow t < \ln 2$

$\forall t \in]-\infty\,, \ln 2[,\ f_0(t) = e^{\frac{1}{2}t}\sqrt{2 - e^t} = \sqrt{e^t(2-e^t)} = \varphi(e^t)$

Ainsi, $\forall t \in]-\infty\,, \ln 2[\ \varphi(e^t) = f_0(t)$. **0,25 pt**

2. Soit g la fonction définie sur l'intervalle $]0\,,2[$ par : $g(t) = \ln(\varphi(t))$.

a) Soit β un réel de l'intervalle $]0\,,2[$.

Résoudre dans $]0\,,2[$ l'équation $g(t) = g(\beta)$.

$$\begin{aligned} g(t) = g(\beta) &\Leftrightarrow \tfrac{1}{2}\ln(2t - t^2) = \tfrac{1}{2}\ln(2\beta - \beta^2) \\ &\Leftrightarrow 2t - t^2 = 2\beta - \beta^2 \\ &\Leftrightarrow 2t - t^2 - 2\beta + \beta^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow 2(t-\beta) - (t-\beta)(t+\beta) = 0 \\ &\Leftrightarrow (t-\beta)[2 - t - \beta] = 0 \\ &\Leftrightarrow t = \beta \text{ ou } t = 2 - \beta \end{aligned}$$

Or $\beta \in]0\,,2]$, $(2-\beta) \in]0\,,2[$.

Par suite les solutions dans l'intervalle $]0\,,2[$ sont $\boldsymbol{\beta}$ et $\mathbf{2 - \boldsymbol{\beta}}$. **0,5 pt**

b) En déduire que la courbe C_g de la fonction g dans le repère $(O\,;\vec{\imath}, \vec{\jmath})$, est invariante par une transformation que l'on déterminera.

On a : $\forall \beta \in]0\,,2]$, $(2-\beta) \in [0, 2[$ et $g(2-\beta) = g(\beta)$

On en déduit que la droite d'équation $x = 1$ est un axe de symétrie pour la courbe C_g.

Cala signifie que Cg est invariante par la **symétrie orthogonale d'axe la droite $x = 1$.** **0,25 pt**

3. Etudier les variations de g.

On a : $g(t) = \frac{1}{2}\ln(2t - t^2)$

La fonction g est dérivable sur l'intervalle $]0\,,2[$ et $\forall t \in]0\,,2[,\ \boldsymbol{g'(t)} = \frac{\mathbf{1-t}}{\mathbf{2t - t^2}}$.

Si $t \in]0\,,1]$, $g'(t) \geq 0$, donc g est croissante sur $]0\,,1]$.

Si $t \in [1\,,2[$, $g'(t) \leq 0$, donc g est décroissante sur $[1\,,2[$ **0,5 pt**

t	0		1		2
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
g	$-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

Commentaire : Le tableau de variations n'étant qu'un tableau récapitulatif des résultats, le candidat qui ne l'établit pas gagne quand même les 0,5 point, d'autant plus que celui-ci n'est pas demandé.

4. Tracer C_g.

(Voir figure). **0,5 pt**

5. Soit h la restriction de g à l'intervalle $]0\,,1]$.

a) Montrer que h est une bijection de $]0\,,1]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

La fonction h est continue et strictement croissante sur $]0\,,1]$, donc h réalise une bijection de $]0\,,1]$ sur $]-\infty\,,0] = $ J. **0,25 pt**

b) Donner l'expression $h^{-1}(t)$ de h^{-1} pour tout élément t de J.

Soit $t \in\,]-\infty\,,0]$ et $x \in\,]0\,,1]$

$$h(x) = t \Leftrightarrow \frac{1}{2}ln(2x - x^2) = t$$
$$\Leftrightarrow 2x - x^2 = e^{2t}$$
$$\Leftrightarrow -x^2 + 2x - e^{2t} = 0$$
$$\Delta' = 1 - e^{2t},$$

Le discriminant réduit $\Delta' \geq 0$ car $t \in\,]-\infty\,,0]$; on a donc deux solutions qui sont :

$$x = 1 - \sqrt{1 - e^{2t}} \quad \text{et } x_2 = 1 + \sqrt{1 - e^{2t}}$$

Comme $x \in\,]0\,,1]$, on a : $x = 1 - \sqrt{1 - e^{2t}}$

Par suite pour tout $t \in\,]-\infty; 0]$, $\boldsymbol{h^{-1}(t) = 1 - \sqrt{1 - e^{2t}}}$. **0,5 pt**

6. Soit $G = h^{-1} \circ g$.

Déterminer le domaine de définition de G, puis l'expression $G(t)$ de G pour tout t de l'intervalle $]0\,,2[$.

- $G = h^{-1} \circ g$

$$\begin{cases} h^{-1} \text{est définie sur } J =]-\infty; 0] \\ \forall\, t \in\,]0\,,2[\,, g(t) \in\,]-\infty; 0] \end{cases} \Rightarrow G = h^{-1} \circ g \text{ est définie sur }]0\,;2[\,.$$ **0,25 pt**

- L'expression $G(t)$ de G pour tout $t \in\,]0 : 2[$.

$G(t) = (h^{-1} \circ g)(t) = h^{-1}(g(t)) = 1 - \sqrt{1 - e^{2g(t)}} = 1 - \sqrt{1 - e^{ln(2t - t^2)}}$

$G(t) = 1 - \sqrt{1 - (2t - t^2)} = 1 - |t - 1|$

- **si** $\boldsymbol{t \in\,]0\,,1]\,, G(t) = t}$
- **si** $\boldsymbol{t \in\,]1\,,2[\,, G(t) = 2 - t}$ **.** **0,25 pt**

Commentaire : Le candidat qui s'arrête à l'expression $\boldsymbol{G(t) = 1 - |t - 1|}$ obtient le 0,25 pt.

PARTIE C (2,25 points)

Pour tout entier naturel n, on considère la fonction φ_n définie sur $[0\,,2]$ par :

$$\varphi_0(t) = \sqrt{t(2 - t)} \quad \text{et } \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \varphi_n(t) = t^n\sqrt{t(2 - t)}\,.$$

On désigne par F_n la fonction définie de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ dans $\mathbb{R}$ par :

$$F_n(\theta) = \int_0^{1\,+\,\sin\theta} \varphi_n(t)\,dt.$$

1. Justifier l'existence de $F_n(\theta)$ pour tout entier naturel n et pour tout réel θ de l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

On a : $\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $0 \leq 1 + \sin\theta \leq 2$

Or, φ_n est continue sur $[0\,,2]$, donc elle l'est sur $[0\,,1 + \sin\theta]$.

Par conséquent, $F_n(\theta)$ existe pour tout entier naturel n et pour tout réel θ de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. **0,25 pt**

2. Démontrer que pour tout entier naturel n, F_n est dérivable sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ et déterminer sa fonction dérivée F_n'. **0,5 pt**

Soient ψ_n la fonction définie sur $[0\,,2]$ par : $\psi_n(x) = \int_0^x \varphi_n(t)dt$ et U la fonction définie sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$ par $U(\theta) = 1 + \sin\theta$.

On a : $F_n = \psi_n \circ U$.

Or, U est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$ et ψ_n dérivable sur $[0\,,2]$. Donc, F_n est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], F_n'(\theta) = U'(\theta) \times {\psi'}_n\big(U(\theta)\big)$$
$$= \cos\theta \times \varphi_n(1 + \sin\theta)$$

- Si $\boldsymbol{n = 0}$, $F_n'(\theta) = \cos\theta \times \sqrt{(1 + \sin\theta)(2 - 1 - \sin\theta)}$

$$= \cos\theta\sqrt{1 - \sin^2\theta} = \cos\theta|\cos\theta| = \cos^2\theta$$

$$\boldsymbol{\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], F_0'(\theta) = \cos^2\theta}\,.$$ **0,25 pt**

- Si $\boldsymbol{n > 0}$ $F_n'(\theta) = \cos\theta(1 + \sin\theta)^n\sqrt{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}$

$$\boldsymbol{\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], F_n'(\theta) = \cos^2\theta(1 + \sin\theta)^n}\,.$$ **0,25 pt**

3. Déterminer $F_0(\theta)$ et $F_1(\theta)$ pour $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$.

- La fonction F_0 est la primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$ de : $\theta \mapsto \cos^2\theta$ qui s'annule en $-\frac{\pi}{2}$. On a donc

$$\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], F_0(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \cos^2(t)\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \frac{1 + \cos(2t)}{2} dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin(2t)\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

$$\boldsymbol{F_0(\theta) = \frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\pi}{4}}\,.$$ **0,25 pt**

- La fonction F_1 est la primitive sur $\left[-\frac{\pi}{2}\,, \frac{\pi}{2}\right]$ de : $\theta \mapsto \cos^2\theta\ (1 + \sin\theta)$ qui s'annule en $-\frac{\pi}{2}$.

On a donc :

$$\forall\, \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right], F_1(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \cos^2(t)(1 + \sin t)dt$$

$$F_1(\theta) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \cos^2(t)dt + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta} \sin t \times \cos^2(t)dt = F_0(\theta) - \frac{1}{3}[\cos^3(t)]_{-\frac{\pi}{2}}^{\theta}$$

$$F_1(\theta) = \boldsymbol{\frac{\theta}{2} + \frac{\sin(2\theta)}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\cos^3(\theta)}{3}}\,.$$ **0,25 pt**

4. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du domaine plan $\mathcal{D}$ défini par :

$\mathcal{D} = \{M(t, y)$ tels que $0 \leq t \leq 1$ et $\varphi_1(t) \leq y \leq \varphi_0(t)\}$.

$\mathcal{A} = \int_0^1 \big(\varphi_0(t) - \varphi_1(t)\big)dt \times U_a$, avec $U_a = \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\|$.

Posons $I = \int_0^1 \varphi_0(t)dt - \int_0^1 \varphi_1(t)\, dt$

$$I = \int_0^{1+\sin 0} \varphi_0(t)dt - \int_0^{1+\sin 0} \varphi_1(t)\, dt$$
$$= F_0(0) - F_1(0)$$
$$= \frac{\pi}{4} - \left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{3}\right)$$
$$= \boldsymbol{\frac{1}{3}}$$

On en déduit que :

$$\boldsymbol{\mathcal{A} = \frac{1}{3} \times U_a = \frac{16}{3}\ \mathrm{cm}^2}.$$ **0,5 pt**

5. Dans le plan muni du repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$, on note (Γ_0) la courbe de la fonction φ_0 et (Γ'_0) la courbe d'équation : $y = -\varphi_0(t)$.

On pose $(\Gamma) = (\Gamma_0) \cup (\Gamma'_0)$.

Montrer que (Γ) est un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$$
\begin{aligned}
M(x,y) \in (\Gamma) = (\Gamma_0) \cup (\Gamma'_0) &\Leftrightarrow M(x,y) \in (\Gamma_0) \text{ ou } M(x,y) \in (\Gamma'_0).\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ y = \varphi_0(0) \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ y = -\varphi_0(0) \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ y - \varphi_0(0) = 0 \text{ ou } y + \varphi_0(0) = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ [y - \varphi_0(0)][y + \varphi_0(0)] = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ y^2 - \left(\varphi_0(0)\right)^2 = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ y^2 - 2x + x^2 = 0 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0\,,2] \\ (x-1)^2 + y^2 = 1 \end{cases}\\
&\Leftrightarrow M(x,y) \text{ appartient au cercle de centre } \Omega(\,1\,,0) \text{ et de rayon } 1\,.
\end{aligned}
$$

Ainsi, (Γ) est le cercle de centre $\Omega(\,1\,;0)$ et de rayon 1 . **0,5 pt**