UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
BP 5005-DAKAR-Fann-Sénégal
Serveur Vocal : 628 05 59
Téléfax (221) 33 864 67 39 - Tél. : 824 95 92 - 824 65 81

n° 2024GS26NA0132
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5
Coef 5
Epreuve du 1^{er} groupe

M A T H E M A T I Q U E S
C O R R I G É

Exercice 1 (05 points).

1. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, on considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = -3i$, $z_B = -2$ et $z_C = 1 + 2i$.

a. Déterminons le module et un argument de $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$.

On a : $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{1 + 2i + 2}{-3i + 2} = \dfrac{3 + 2i}{-3i + 2} = \dfrac{i(-3i + 2)}{-3i + 2} = i$. **0, 25 pt**

Le module de $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$:

$\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = |i| = 1$. **0, 25 pt**

Un argument de $\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}$:

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2}$. **0, 25 pt**

Commentaire *: si le candidat*

- *calcule directement le module du numérateur et celui du dénominateur, puis fait leur rapport pour trouver le module du quotient,*
- *ensuite, détermine un argument du numérateur et un du dénominateur, puis calcule la différence entre les deux pour donner un argument du quotient*

alors vous lui donnez ***0, 75 point****.*

b. Déduis-on en **la nature du triangle** ABC.

$\left|\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right| = 1 \Longrightarrow \dfrac{|z_C - z_B|}{|z_A - z_B|} = 1 \Longrightarrow \dfrac{BC}{AB} = 1 \Longrightarrow BC = AB$,

$\arg\left(\dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B}\right) = \arg(i) = \dfrac{\pi}{2} \Longrightarrow (\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = \dfrac{\pi}{2}$ et $BC = AB$, donc le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle de sommet principal B. **0, 75 pt**

c. Déterminons l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $BADC$ soit un carré.

Comme le triangle ABC est un triangle rectangle isocèle en B, pour que $BADC$ soit un carré, il suffit que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$.

$\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow z_A - z_B = z_D - z_C \Longleftrightarrow 2 - 3i = z_D - 1 - 2i \Longleftrightarrow z_D = 2 - 3i + 1 + 2i$.

D'où $z_D = 3 - i$. **0, 5 pt**

d. Montrons que les points A, B, C et D appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

$BADC$ est un carré, donc les points A, B, C et D appartiennent au cercle circonscrit au carré

$BADC$. Son centre est le milieu J de $[AC]$ et son rayon est $r = \frac{1}{2}AC$.

$z_J = \frac{1}{2}(z_A + z_C) = \frac{1}{2}(-3i + 1 + 2i) = \frac{1}{2}(1 - i) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$.

$r = \frac{1}{2}|z_C - z_A| = \frac{1}{2}|1 + 2i + 3i| = \frac{1}{2}|1 + 5i| = \frac{1}{2}\sqrt{1 + 5^2} = \frac{\sqrt{26}}{2}$. **0, 75 pt**

Commentaire *: si le candidat démontre que le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible dans un cercle par les angles opposés alors vous lui donnez* **0, 75 *point***.

2. On considère les points M et M' d'affixes respectives $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont des réels. Soit S l'application du plan dans le plan d'expression analytique :

$$\begin{cases} x' = x - y + 2 \\ y' = x + y - 1. \end{cases}$$

a. Montrons que l'écriture complexe de S est : $z' = (1 + i)z + 2 - i$.
On sait que $z' = x' + iy'$ et que $x' = x - y + 2,\ y' = x + y - 1$.
Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} z' = x' + iy' &= x - y + 2 + i(x + y - 1) = x - y + 2 + ix + iy - i = x + iy + ix - y + 2 - i \\ &= x + iy + i(x + iy) + 2 - i = (x + iy)(1 + i) + 2 - i = z(1 + i) + 2 - i. \end{aligned}$$

D'où $z' = (1 + i)z + 2 - i$. **0, 5 pt**

b. Nature et éléments caractéristiques de S

On sait que $z' = (1 + i)z + 2 - i$. Ainsi, z' s'écrit sous la forme $z' = az + b$ avec $a = 1 + i$, et $b = 2 - i$.

On a $a \neq 1$, donc S est une similitude plane directe de centre $\Omega(z_\Omega)$, de rapport k et d'angle θ, avec

$$z_\Omega = \frac{b}{1 - a} = \frac{2 - i}{1 - 1 - i} = \frac{2 - i}{-i} = 1 + 2i = z_C,$$
$$k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2},$$
$$\theta = \arg(a) = \arg(1 + i) = \frac{\pi}{4} \ [2\pi].$$

S est la similitude de centre C, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$. **0, 75 pt**

Commentaire *: si le candidat*

— *cherche le point invariant $\Omega(z_\Omega)$ de l'application qui à $M(z) \mapsto M'(z')$,*

— *puis, pour tout $M \neq \Omega$, s'il détermine le rapport $\dfrac{\Omega M'}{\Omega M}$,*

— *ensuite, une mesure de l'angle $(\overrightarrow{\Omega M}, \overrightarrow{\Omega M'})$,* *alors il a répondu à la question. Vous lui donnez* ***0,75 point****.*

c. Déterminer l'image par S de la droite (D) d'équation $x + y + 1 = 0$.
On considère l'expression analytique de S :

$$\begin{cases} x^{'} = x - y + 2 & (\mathbf{E_1}) \\ y^{'} = x + y - 1 & (\mathbf{E_2}). \end{cases}$$

Exprimons x et y en fonction de $x^{'}$ et $y^{'}$.

$(\mathbf{E_1}) + (\mathbf{E_2}) \Longrightarrow x^{'} + y^{'} = 2x + 1 \Longrightarrow x^{'} + y^{'} - 1 = 2x \Longrightarrow x = \frac{1}{2}(x^{'} + y^{'} - 1)$.

$(\mathbf{E_1}) - (\mathbf{E_2}) \Longrightarrow x^{'} - y^{'} = -2y + 3 \Longrightarrow x^{'} - y^{'} - 3 = -2y \Longrightarrow y = -\frac{1}{2}(x^{'} - y^{'} - 3)$.

(D) étant la droite d'équation $x + y + 1 = 0$.

$x+y+1 = 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{2}(x^{'}+y^{'}-1) - \frac{1}{2}(x^{'}-y^{'}-3)+1 = 0 \Longleftrightarrow x^{'}+y^{'}-1-(x^{'}-y^{'}-3)+2 = 0$

$\Longleftrightarrow x^{'} + y^{'} - 1 - x^{'} + y^{'} + 3 + 2 = 0 \Longleftrightarrow 2y^{'} + 4 = 0 \Longleftrightarrow y^{'} + 2 = 0 \Longleftrightarrow y^{'} = -2$.

Soit $(D^{'})$ l'image de (D) par S.

$(D^{'})$ est l'ensemble des points $M(x, y)$ du plan, d'équation $y = -2$.

$(D^{'})$ est donc la droite d'équation $y = -2$. **0,5 pt**

Commentaire *: si le candidat*
- *choisit deux points distincts de la droite (D), puis détermine leurs images respectives par S*
- *ensuite, utilise les propriétés relatives à l'image d'une droite par une rotation et une homothétie (ou par une similitude plane directe), pour déterminer l'équation de $(D^{'})$ à l'aide des images de points obtenues, alors vous lui donnez* ***0,5 point****.*

d. Déterminons l'ensemble des points M dont l'affixe z vérifie $|(1 + i)z + 2 - i| = 2$.

$$\begin{aligned} \text{On sait que } (1+i)z + 2 - i &= (1+i)\Big(z + \frac{2-i}{1+i}\Big) = (1+i)\Big(z + \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)}\Big) \\ &= (1+i)\Big(z + \frac{2-2i-i-1}{2}\Big) = (1+i)\Big(z + \frac{1-3i}{2}\Big) \\ &= (1+i)\Big(z + \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i\Big) = (1+i)\Big(z - \big(-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i\big)\Big) \quad (\mathbf{R}) \end{aligned}$$

Soit K le point d'affixe $z_K = -\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{2}i$.

D'après $(\mathbf{R})$, $\quad (1 + i)z + 2 - i = (1 + i)\Big(z - z_K\Big)$.
D'où $\Big|(1+i)z + 2 - i\Big| = 2 \Longleftrightarrow \Big|(1+i)\Big(z - z_K\Big)\Big| = 2 \Longleftrightarrow \Big|1+i\Big|\Big|\Big(z - z_K\Big)\Big| = 2$

$\Longleftrightarrow \sqrt{2}\Big|z - z_K\Big| = 2 \Longleftrightarrow \Big|z - z_K\Big| = \sqrt{2} \Longleftrightarrow KM = \sqrt{2} \Longleftrightarrow M$ appartient au cercle

de centre K et de rayon $\sqrt{2}$. **0,5 pt**

Commentaire *: si le candidat*

— *détermine l'écriture algébrique du nombre complexe $(1+i)z+2-i$*
— *puis, calcule son module et pose que c'est égal à 2,*
— *ensuite, identifie que l'équation obtenue est celle d'un cercle dont il détermine le centre et le rayon, alors vous lui donnez* **0, 5** ***point***.

Exercice 2 (05 points).
Dans cet exercice, les outils mathématiques au programme de Terminale $S2$ utilisés par l'élève sont les "**Probabilités**". L'expérience aléatoire consiste à contrôler les articles produits par les usines avant leur mise en vente.

Considérons les événements suivants :

U_1 : les articles proviennent de l'unité U_1 ;

U_2 : les articles proviennent de l'unité U_2 ;

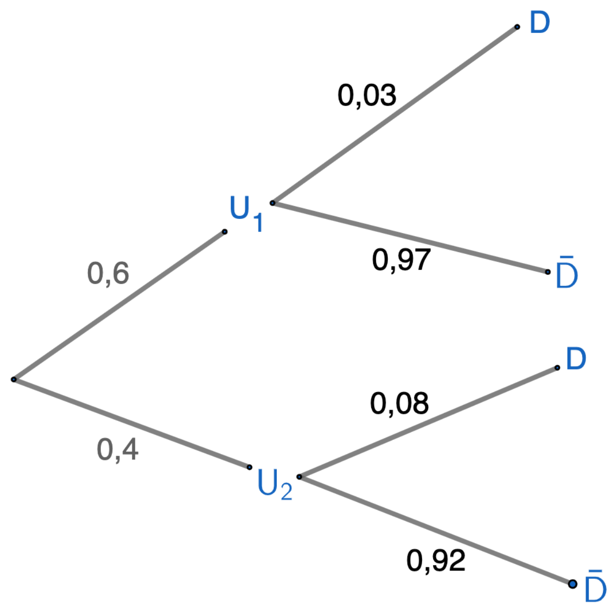
D : les articles présentent un défaut de fabrication ou les articles sont défectueux ;

$\overline{D}$: les articles ne présentant pas un défaut de fabrication ou les articles ne sont pas défectueux.

V : un article est vendu après contrôle ;

$\overline{V}$: un article n'est pas vendu après contrôle.

1. Pour démontrer que 5% des articles produits présentent un défaut de fabrication, il suffit de démontrer que $p(D) = 0,05$. Ainsi,
— premièrement, donnons cet arbre pondéré qui illustre la situation des articles qui présentent un défaut de fabrication :



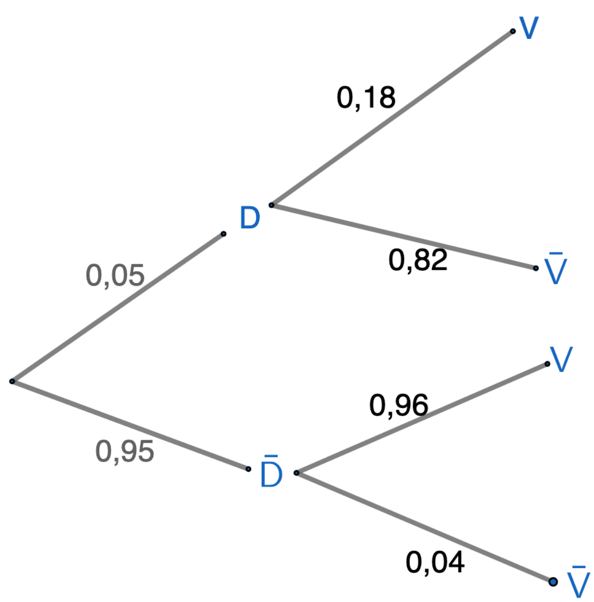
On peut en déduire que $p(D) = p(D \cap U_1) + p(D \cap U_2)$.

— deuxièmement, déterminons $p(D)$.
On calcule d'abord $p(D \cap U_1)$.

$p(D \cap U_1) = p(D/U_1) \times p(U_1) = 0,03 \times 0,6 = 0,018.$
Puis, on calcule : $p(D \cap U_2) = p(D/U_2) \times p(U_2) = 0,08 \times 0,4 = 0,032.$
Ce qui implique que $p(D) = p(D \cap U_1) + p(D \cap U_2) = 0,018 + 0,032 = 0,05.$
Ce qui implique que 5% des articles produits présentent un défaut de fabrication. **2 pts**

Commentaire : *Les* **2 points** *seront distribués comme suit : si le candidat*
— *écrit correctement les formules des probabilités qu'il utilise dans cette situation.* $\mathbf{0,5}$ ***pt***.
— *calcule correctement la probabilité conditionnelle d'un événement.* **1** ***pt***.
— *utilise la formule des probabilités totales pour obtenir les résultats attendus.* $\mathbf{0,5}$ ***pt***.

2. a. On donne cet arbre pondéré qui illustre la situation qu'un article pris au hasard ait la chance d'être vendu après contrôle.



b. Soit $p(V)$ la probabilité qu'un article pris au hasard soit mis en vente après contrôle.

On a $p(V) = p(V \cap D) + p(V \cap \overline{D})$.

On sait que $p(V \cap D) = p(V/D) \times p(D) = 0,18 \times 0,05 = 0,009$

et $p(V \cap \overline{D}) = p(V/\overline{D}) \times p(\overline{D}) = 0,96 \times 0,95 = 0,912.$

D'où $p(V) = p(V \cap D) + p(V \cap \overline{D}) = 0,009 + 0,912 = 0,921.$
Donc la chance qu'un article fabriqué pris au hasard soit mis en vente après contrôle est de $0,921$. **2 pts**

Commentaire : *Les* **2 points** *seront distribués comme suit : si le candidat*
— *écrit correctement les formules des probabilités qu'il utilise dans cette situation.* $\mathbf{0,5}$ ***pt***.
— *calcule correctement la probabilité conditionnelle d'un événement.* **1** ***pt***.
— *utilise la formule des probabilités totales pour obtenir les résultats attendus.* $\mathbf{0,5}$ ***pt***.

3. On sait que $p(V \cap D) = 0,009$. C'est à dire 0,9% des articles vendus sont défectueux. Or

$0,9\% < 1\%$, donc ce contrôle permet à l'entreprise de réaliser son souhait. **1 pt**

Commentaire *: si le candidat interprète correctement les résultats obtenus en indiquant ce que l'entreprise pourrait prendre comme décision, alors vous lui donnez* ***1 pt****.*

PROBLEME (10 points).

Commentaire *: dans les deux parties qui suivent, le correcteur doit tenir compte de la démarche, du raisonnement et de la justesse des résultats dans l'appréciation des copies des élèves.*

Partie A

1. Pour tout $x < 0$, on pose : $u(x) = x + 1 - e^{-x}$.

Étudions le signe de $1 - e^{-x}$ pour $x < 0$.

$x < 0 \Longrightarrow -x > 0 \Longrightarrow e^{-x} > 1 \Longrightarrow 1 - e^{-x} < 0,$ **0, 25 pt**

Déduisons-en que pour tout $x < 0$, $u(x) < 0$.

On sait que $\left.\begin{array}{c} x < 0 \\ 1 - e^{-x} < 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow x + 1 - e^{-x} < 0 \Longrightarrow u(x) < 0.$ **0, 25 pt**

2. Pour tout $x > 0$, on pose : $v(x) = x - 1 - \ln x$.

a. Dressons le tableau de variations de v.

Limites aux bornes de l'intervalle $]0, +\infty[$:

$\lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} v(x) = +\infty$.

$v(x) = x\left(1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x}\right)$; $\lim\limits_{x\to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

Ainsi, $\lim\limits_{x\to +\infty} 1 - \frac{1}{x} - \frac{\ln x}{x} = 1$; donc $\lim\limits_{x\to +\infty} v(x) = +\infty$.

Continuité de v :

La fonction qui à $x \mapsto x - 1$ est continue sur $\mathbb{R}$ car étant une fonction polynôme, donc elle continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$,

La fonction qui à $x \mapsto \ln x$ est continue sur $]0, +\infty[$,

Par somme, la fonction v est continue sur $]0, +\infty[$.

Dérivabilité de v :

La fonction qui à $x \mapsto x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car étant une fonction polynôme, donc elle dérivable sur l'intervalle $]0, +\infty[$, La fonction qui à $x \mapsto \ln x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$,

v est dérivable sur $]0, +\infty[$ par somme et $\forall x \in]0, +\infty[$, $v^{'}(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $v^{'}(x)$ est du signe de $x - 1$.

Tableau de signe de $x - 1$:

x	0		1		$+\infty$
$v^{'}(x)$	||	$-$	0	$+$	

$0,5$ pt

$v^{'}(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \ ]1, +\infty[$,

$v^{'}(x) < 0 \Longleftrightarrow x \in]0,\ 1[$,
$v^{'}(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 1$.

v est strictement décroissante sur $]0, 1]$ et strictement croissante sur $[1, +\infty[$, $v(1) = 0$.

x	0		1		$+\infty$
$v^{'}(x)$	||	$-$	0	$+$	
v	|| $+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

$0,5$pt

b. D'après le tableau de variations, v admet un minimum en 1 sur $]0, +\infty[$ et ce minimum est 0. Donc $\forall x \in]0, +\infty[$, $v(x) \geq 0$. **$0,5$ pt**

Partie B

1. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \begin{cases} xe^x - x - 1 & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 - 1 - 2x\ln x & \text{si } x > 0 \end{cases}$

a. $f(x)$ existe $\Longleftrightarrow x \leq 0$ ou $x > 0 \Longleftrightarrow x \in \mathbb{R}$, donc $D_f = \mathbb{R}$. **$0,5$ pt**

b. Étudions les **limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$** :

$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} -x-1 = \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. **0,25 pt**

Sur $]0,+\infty[$, $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x = x^2\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} - 2\dfrac{\ln x}{x} = 1$,
par conséquent $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$. **0,25 pt**

c. Supposons que $x \leq 0$. Alors $f(x) = xe^x - x - 1 = -x - 1 + xe^x$. Or, $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$, donc la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = -x-1$ est asymptote oblique à $(\mathcal{C}_f)$ en $-\infty$. **0,25 pt**

Position relative de $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{C}_f)$:

$\forall x \in]-\infty, 0[$, $f(x) + x + 1 = xe^x$. Or $x < 0$ et $e^x > 0$, donc $f(x) + x + 1 < 0$, d'où $(\mathcal{C}_f)$

est en dessous de $(\mathcal{D})$. **0,25 pt**

d. Etudions la nature de la branche infinie de $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

$\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) = x^2 - 1 - 2x\ln x \Longrightarrow \dfrac{f(x)}{x} = x\left(1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x}\right)$.

Or $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{x^2} - \dfrac{2\ln x}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$.

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $+\infty$. **0,5 pt**

2. a. Etudions la continuité de f en 0 :

D'une part, $\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} -x - 1 + xe^x = -1$,

D'autre part, on a $\lim\limits_{x\to0^+} x^2 - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2x\ln x = 0$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = -1$.

On a en plus $f(0) = 0e^0 - 0 - 1 = -1$.

On obtient le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$, donc f est continue en 0. **0,5 pt**

b. Etudions la dérivabilité de f en 0 :

Supposons que $x < 0$. Alors on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{xe^x - x - 1 + 1}{x} = \dfrac{x(e^x - 1)}{x} = e^x - 1$. D'où,
$\lim\limits_{x\to0^-} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^-} e^x - 1 = 0$.

Supposons que $x > 0$. Alors on a $\dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \dfrac{x^2 - 1 - 2x\ln x + 1}{x} = \dfrac{x(x - 2\ln x)}{x} = x - 2\ln x$.

D'où, $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x} = \lim\limits_{x\to0^+} x - 2\ln x$. Or $\lim\limits_{x\to0^+} x = 0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} 2\ln x = -\infty$. Donc

f n'est pas dérivable à droite en 0, d'où f n'est pas dérivable 0. **0,5 pt**

$(\mathcal{C}_f)$ admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente horizontale à gauche et une demi-tangente verticale à droite. **0,5 pt**

3. a. Etudions la dérivabilité de f sur $]-\infty,\ 0[$

On sait que $\left\{\begin{array}{c} x \mapsto e^x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto xe^x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ par produit}, \\ x \mapsto -x-1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \end{array}\right.$

D'où $f : x \mapsto xe^x - x - 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ par somme.

Donc, $f : x \mapsto xe^x - x - 1$ est dérivable pour tout $x < 0$.

Déduisons-en le signe de $f'(x)$ sur $]-\infty,\ 0[$

On a $f'(x) = e^x + xe^x - 1 = e^x(1 + x - \frac{1}{e^x}) = e^x(1 + x - e^{-x}) = u(x)e^x$, **0,5 pt**

Sur $]-\infty, 0[$, $u(x) < 0$ et $e^x > 0$, donc $f'(x) < 0$ sur $]-\infty,\ 0[$. **0,25 pt**

b. Etudions la dérivabilité de f sur $]0,\ +\infty[$

On sait que $\left\{\begin{array}{c} x \mapsto x^2 - 1 \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto 2x \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}, \\ x \mapsto \ln x \text{ est dérivable sur }]0,\ +\infty[, \\ x \mapsto 2x\ln x \text{ est dérivable sur }]0,\ +\infty[\text{ par produit}, \end{array}\right.$

D'où $f : x \mapsto x^2 - 1 - 2x\ln x$ est dérivable sur $]0,\ +\infty[$ par somme.

Donc, $f : x \mapsto x^2 - 1 - 2x\ln x$ est dérivable pour tout $x > 0$.

On a $f'(x) = 2x - 2(\ln x + x \times \frac{1}{x}) = 2x - 2(\ln x + 1) = 2(x - \ln x - 1) = 2v(x)$. **0,5 pt**

Déduisons-en le signe de $f'(x)$ sur $]0,\ +\infty[$:

Sur $]0\ \ +\infty[$, $v(x) \geq 0$ donc $f'(x) \geq 0$ sur $]0\ \ +\infty[$. **0,25 pt**

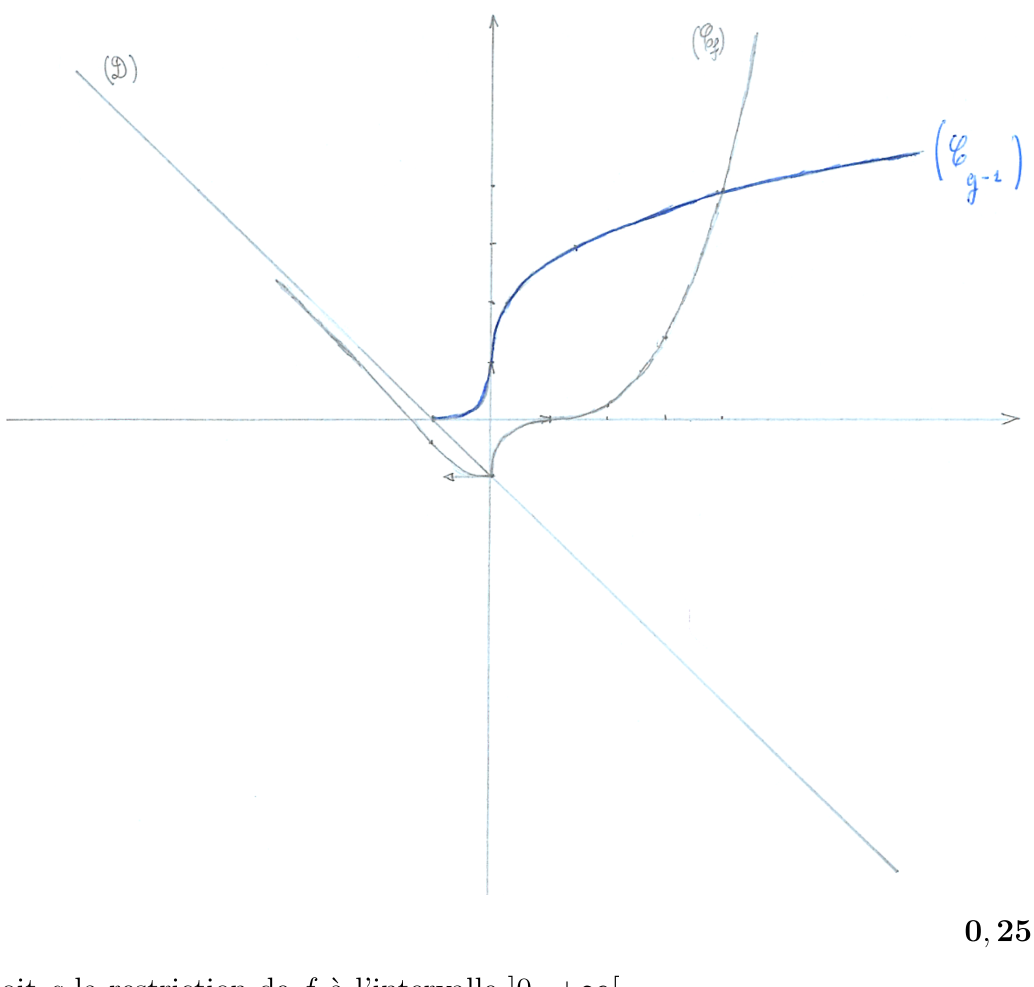
$f'(x) = 0 \iff v(x) = 0 \iff x = 1.$

c. Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\|\|$	$+$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0, 5 pt

4. Traçons la (D) et $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère $(O;\vec{i},\vec{j})$
$f(-1) \simeq -0,4$; $f(2) \simeq 3 - 4\ln 2$; $f(3) \simeq 8 - 6\ln 3$; $f(4) \simeq 3,9$.



0, 25 + 0, 5 pt

5. a. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]0, +\infty[$.

g est continue et strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$ donc g est une bijection de $]0,\ +\infty[$ sur $g(]0,\ +\infty[) =]-1,\ +\infty[$. Par conséquent, g admet une bijection réciproque g^{-1} définie sur $]-1,\ +\infty[$. $D_{g^{-1}} =]-1,\ +\infty[$.

g est strictement croissante sur $]0,\ +\infty[$, donc g^{-1} est strictement croissante sur $]-1,\ +\infty[$.
$0,25 + 0,25 + 0,25$ pt

b. Voir figure. **$0,25$ pt**

6. a. Soit λ un réel strictement positif,
$A(\lambda) = \int_{\lambda}^{0} [-x - 1 - f(x)]\, dx \times u.a = \int_{\lambda}^{0} -xe^x dx \times u.a = -\int_{\lambda}^{0} xe^x dx \times u.a,$

Posons $u^{'}(x) = e^x$ et $v(x) = x$. Alors $v^{'}(x) = 1$. Choisissons $u(x) = e^x$

$$\int_{\lambda}^{0} u^{'}(x)v(x)dx = [u(x)v(x)]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0} v(^{'}x)u(x)dx.$$

$$\Longrightarrow \int_{\lambda}^{0} xe^x dx = [xe^x]_{\lambda}^{0} - \int_{\lambda}^{0} e^x dx = \lambda e^{\lambda} - (1 - e^{\lambda}).$$

$$\Longrightarrow \int_{\lambda}^{0} xe^x dx = -\lambda e^{\lambda} - 1 + e^{\lambda}.$$

$A(\lambda) = (\lambda e^{\lambda} + 1 - e^{\lambda}) \times 1cm^2$. **$0,5$ pt**

b. $\lim\limits_{x \to -\infty} \lambda e^{\lambda} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{\lambda} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} A(\lambda) = 1cm^2$ **$0,25$ pt**