EXERCICE 1 : 4,5 points

Soit n un entier naturel non nul, on note $d_n = PGCD\ (\ 2^n - 1\ , 4^n - 1\ )$ et

$p_n = PPCM\ (\ 2^n - 1\ , 4^n - 1\ )$.

1. Calculons d_1, d_2, p_1 et p_2.
   $d_1 = PGCD\ (\ 2^1 - 1\ , 4^1 - 1\ ) = PGCD\ (\ 1\ , 3\ ) = 1$ **0,25 pt**
   $d_2 = PGCD\ (\ 2^2 - 1\ , 4^2 - 1\ ) = PGCD\ (\ 3\ , 15\ ) = 3$ **0,25 pt**
   $p_1 = PPCM\ (\ 2^1 - 1\ , 4^1 - 1\ ) = PPCM\ (\ 1\ , 3\ ) = 3$ **0,25 pt**
   $p_2 = PPCM\ (\ 2^2 - 1\ , 4^2 - 1\ ) = PPCM\ (\ 3\ , 15\ ) = 15$ **0,25 pt**

2. Prouvons que d_6 et p_6 sont divisibles par 7.
   7 est un nombre premier et 2 est premier avec 7 d'après le petit théorème de Fermat $2^6 - 1$ est divisible par 7.
   7 est un nombre premier et 4 est premier avec 7 d'après le petit théorème de Fermat $4^6 - 1$ est divisible par 7.
   7 divise $2^6 - 1$ et $4^6 - 1$ donc 7 divise $d_6 = PGCD\ (\ 2^6 - 1\ , 4^6 - 1\ )$ et
   $p_6 = PPCM\ (\ 2^6 - 1\ , 4^6 - 1\ )$. **0,5 pt**
3. Etablissons une relation entre d_n et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   $\forall (a\ , b) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\ , PPCM(a\ , b) \times PGCD(a\ , b) = ab$.
   De là on tire que $d_n \times p_n = (2^n - 1)(4^n - 1\ )$ **0,25 pt**
4. On pose $M_n = 2^n - 1\ ,\ \ \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Vérifions que $M_3 \equiv 0[7]$.
      $M_3 = 2^3 - 1 = 7$ et $7 \equiv 0\ [7]$ donc $M_3 \equiv 0[7]$ **0,25 pt**
   b) Déterminons le reste de la division euclidienne de M_{3n+1} par 7.
      $M_{3n+1} = 2^{3n+1} - 1$
      $2^3 \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3n} \equiv 1[7] \Rightarrow 2^{3n+1} \equiv 2[7]$ d'où $2^{3n+1} - 1 \equiv 1[7]$.
      Donc, le reste de la division euclidienne de M_{3n+1} par 7 est **1.** **0,25 pt**
   c) Montrons que M_n divise $4^n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
      $\forall n \in \mathbb{N}^*, 4^n - 1 = (2^n)^2 - 1 = (2^n + 1)(2^n - 1) = (2^n + 1)M_n$
      donc $M_n$divise $4^n - 1$. **0,25 pt**
   d) Déduisons- en que $d_n = M_n$ et $p_n =\ 4^n - 1$.
      $d_n = PGCD\ (\ 2^n - 1\ , 4^n - 1\ ) = PGCD\ (\ 2^n - 1\ , (2^n + 1)(2^n - 1)\ )$
      $= (2^n - 1) PGCD\ (\ 1\ , (2^n + 1)\ ) = 2^n - 1 = M_n$
      $p_n = PPCM\ (\ 2^n - 1\ , 4^n - 1\ ) = PPCM\ (\ 2^n - 1\ , (2^n + 1)(2^n - 1)\ )$
      $= (2^n - 1) PPCM\ (\ 1\ , (2^n + 1)\ ) = (2^n - 1)(2^n + 1) = 4^n - 1$. **0,5 pt**
5. On pose $S_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ et $S'_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n\ , \forall n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Exprimons S_n et S'_n en fonction de n.
      $S_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n = 2^1 - 1 + 2^2 - 1 + \cdots\ + 2^n - 1 = 2^1 + 2^2 + \cdots + 2^n - n$
      $= \mathbf{2}\left(\frac{\mathbf{2^n - 1}}{\mathbf{2 - 1}}\right) - \boldsymbol{n} = \mathbf{2(2^n - 1)} - \boldsymbol{n}$ **0,5 pt**
      $S'_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n = 4^1 - 1 + 4^2 - 1 + \cdots +\ 4^n - 1 = 4^1 + 4^2 + \cdots + 4^n - n$
      $= \mathbf{4}\left(\frac{\mathbf{4^n - 1}}{\mathbf{4 - 1}}\right) - \boldsymbol{n} = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{3}}\mathbf{(4^n - 1)} - \boldsymbol{n}$ **0,5 pt**

b) Montrons que $3S'_n - 2S_n + n = 2^{n+2} \times d_n$.

$3S'_n - 2S_n + n = 4(4^n - 1) - 3n - 4(2^n - 1) + 2n + \mathrm{n} = 4(4^n - 1) - 4(2^n - 1) =$
$4(2^n - 1)(2^n + 1 - 1) = 4 \times 2^n(2^n - 1) = 2^{n+2} \times d_n$ **0,5 pt**

EXERCICE 2 : 4,5 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Soit a un réel strictement positif.

On considère les points $A\left(0; 0; \sqrt{2}\right)$, $B(a; 0; 0))$ et $C\left(0; \frac{4}{a}; 0\right)$.

1. Déterminons en fonction de a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \left(-\sqrt{2} \times 0 + \frac{4}{a} \times \sqrt{2}\right)\vec{\imath} - (-\sqrt{2} \times a + 0 \times \sqrt{2})\vec{\jmath} + \left(a \times \frac{4}{a} - 0 \times 0\right)\vec{k}$

$= \frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{\imath} + a\sqrt{2}\,\vec{\jmath} + 4\vec{k}$.

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{\imath} + a\sqrt{2}\,\vec{\jmath} + 4\vec{k}}$. **0,5 pt**

2. a) Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $4x + a^2y + 2a\sqrt{2}\,z - 4a = 0$.

Soit $M\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in (ABC)$.

On a : $\overrightarrow{AM}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = 0$, $\left(x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + \left(z - \sqrt{2}\right)\vec{k}\right).\left(\frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{\imath} + a\sqrt{2}\,\vec{\jmath} + 4\vec{k}\right) = 0$

$\frac{4\sqrt{2}}{a}x + a\sqrt{2}\,y + 4az - 4\sqrt{2} = 0$

D'où **(ABC) :** $\boldsymbol{4x + a^2y + 2a\sqrt{2}\,z - 4a = 0}$. **0,5 pt**

b) On note d la distance de O au plan $(AB$C)

Montrons que : $\mathrm{d} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$.

$\mathrm{d} = \mathrm{d}(O, \mathrm{ABC}) = \frac{|-4a|}{\sqrt{16 + a^4 + 8a^2}} = \frac{4a}{\sqrt{(a^2+4)^2}} = \frac{4a}{a^2+4} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$

d'où $\boldsymbol{\mathrm{d} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}}$. **0,5 pt**

c) Déterminons la valeur de a pour laquelle la distance d est maximale.

On a : $\boldsymbol{\mathrm{d} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}}$ **, d** est maximale si $\frac{(a-2)^2}{a^2+4} = 0$, **donc** $\boldsymbol{a = 2}$

On peut aussi étudier la fonction $f(t) = \frac{4t}{t^2+4}$

f est dérivable sur l'intervalle $]0; +\infty[$ et $f'(t) = \frac{-4t^2+16}{(t^2+4)^2}$

$f'(t) = 0$, $-4t^2 + 16 = 0$, d'où $\boldsymbol{t = 2}$. **0,25 pt**

3. a) Montrer que le volume du tétraèdre OABC est égale à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\mathbf{V_{OABC}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{1}{6}\left|\sqrt{2}\ \vec{k}.\left(\frac{4\sqrt{2}}{a}\vec{\imath} + a\sqrt{2}\ \vec{\jmath} - 4\vec{k}\right)\right| = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$\mathbf{V_{OABC}} = \frac{\mathbf{2\sqrt{2}}}{\mathbf{3}}$. **0,5 pt**

b) Déduisons-en que l'aire du triangle ABC est supérieure ou égale à $2\sqrt{2}$.

$$\mathbf{V_{OABC}} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{OA}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right| = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{3}}\mathrm{d}(O, \mathrm{ABC}) \times \mathrm{Aire}(ABC)$$

$$\mathrm{d}(O, \mathrm{ABC}) \times \mathrm{Aire}(ABC) = 2\sqrt{2} \implies \mathrm{Aire}(ABC) = 2\sqrt{2} \times \frac{1}{d(O, ABC)}$$

Or $\mathrm{d}(O, \mathrm{ABC}) \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{d(O,ABC)} \geq 1 \Rightarrow 2\sqrt{2} \times \frac{1}{d(O,ABC)} \geq 2\sqrt{2}$.

D'où $\mathrm{Aire}(ABC) \geq 2\sqrt{2}$ **0,5 pt**

c) Déterminons les coordonnées des points B et C pour lesquelles l'aire du triangle ABC est égale à $2\sqrt{2}$.

$$\mathrm{Aire}(ABC) = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\frac{\mathbf{4\sqrt{2}}}{\boldsymbol{a}}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \boldsymbol{a}\sqrt{\mathbf{2}}\ \vec{\boldsymbol{\jmath}} + \mathbf{4}\vec{\boldsymbol{k}}\right\| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{a^2} + 2a^2 + 16}$$

$$\mathrm{Aire}(ABC) = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2}\sqrt{\frac{32}{a^2} + 2a^2 + 16} = 2\sqrt{2} \Leftrightarrow a^4 - 8a^2 + 16 = 0 \Leftrightarrow (a^2-4)^2 = 0$$

$\Leftrightarrow a = 2$. B a alors pour coordonnées $(2,\ 0,\ 0)$ et C a pour coordonnées $(0,\ 2\ , 0)$ **0,5 pt**

4. Soit le plan P d'équation : $x + y + \sqrt{2}\ z = 2$.

Déterminons les coordonnées des points M, N et Q, intersections respectives du plan P avec les axes $(O;\ \vec{\imath})$, $(O;\vec{\jmath})$ et $\left(O;\vec{k}\right)$.

$\{M\} = \mathrm{P} \cap (O\ ;\ \vec{\imath}) \implies \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{M}\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ **0,25 pt**

$\{N\} = \mathrm{P} \cap \left(O\ ;\ \vec{\jmath}\right) \implies \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{N}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ **0,25 pt**

$\{\ Q\} = \mathrm{P} \cap \left(O\ ;\ \vec{k}\right) \implies \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathrm{Q}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$ **0,25 pt**

5. Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

Montrons que le plan P et la sphère (S) sont tangents en un point I dont on déterminera les coordonnées.

P : $x + y + \sqrt{2}\ z = 2$ et S: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

S est la sphère de centre O et de rayon 1. Calculons la distance du point 0 au plan P.

Le plan P correspond au plan ABC dans le cas où $a = 2$ et dans ce cas précis la distance du point 0 au plan P est égale à 1 qui est le rayon de la sphère par conséquent le plan et la sphère sont tangents en un point I. **0,25 pt**

Déterminons les coordonnées de I.

La droite (OI) est orthogonale au plan (ABC)

$\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{OI} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \implies \begin{cases} 2x_I - \sqrt{2}z_I = 0 \\ 2y_I - \sqrt{2}z_I = 0 \end{cases} \Longrightarrow x_I = y_I = \sqrt{2}z_I$

De plus $I \in P \implies x_I + y_I + \sqrt{2}\ z_I = 2$ par suite $x_I = y_I = \frac{1}{2}$ et $z_I = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$I\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ **0,25 pt**

PROBLEME : 11 points

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{2nx}+1}$ et (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.

PARTIE A

1. Etudions la parité de f_n.
Pour tout $x \in IR$, $-x \in IR$
$f_n(-x) = \frac{e^{-nx}}{e^{-2nx}+1} = \frac{e^{-nx}}{e^{-2nx}(e^{2nx}+1)} = \frac{e^{nx}}{e^{2nx}+1}$
D'où $\boldsymbol{f_n(-x) = f_n(x)}$ par suite $\boldsymbol{f_n}$ **est paire** **0,25 pt**

2. Etudions les variations de f_n sur $[0\ ;\ +\infty[$.
f_n est dérivable sur IR comme quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.
$f'_n(x) = \frac{ne^{nx}(e^{2nx}+1) - 2n\,e^{2nx}(e^{nx})}{(e^{2nx}+1)^2} = \frac{n\,e^{3nx} + n\,e^{nx} - 2n\,e^{3nx}}{(e^{2nx}+1)^2} = \frac{n\,e^{nx}(1 - e^{2nx})}{(e^{2nx}+1)^2}$

$\boldsymbol{f'_n(x) = \frac{n\,e^{nx}(1 - e^{2nx})}{(e^{2nx}+1)^2}}$

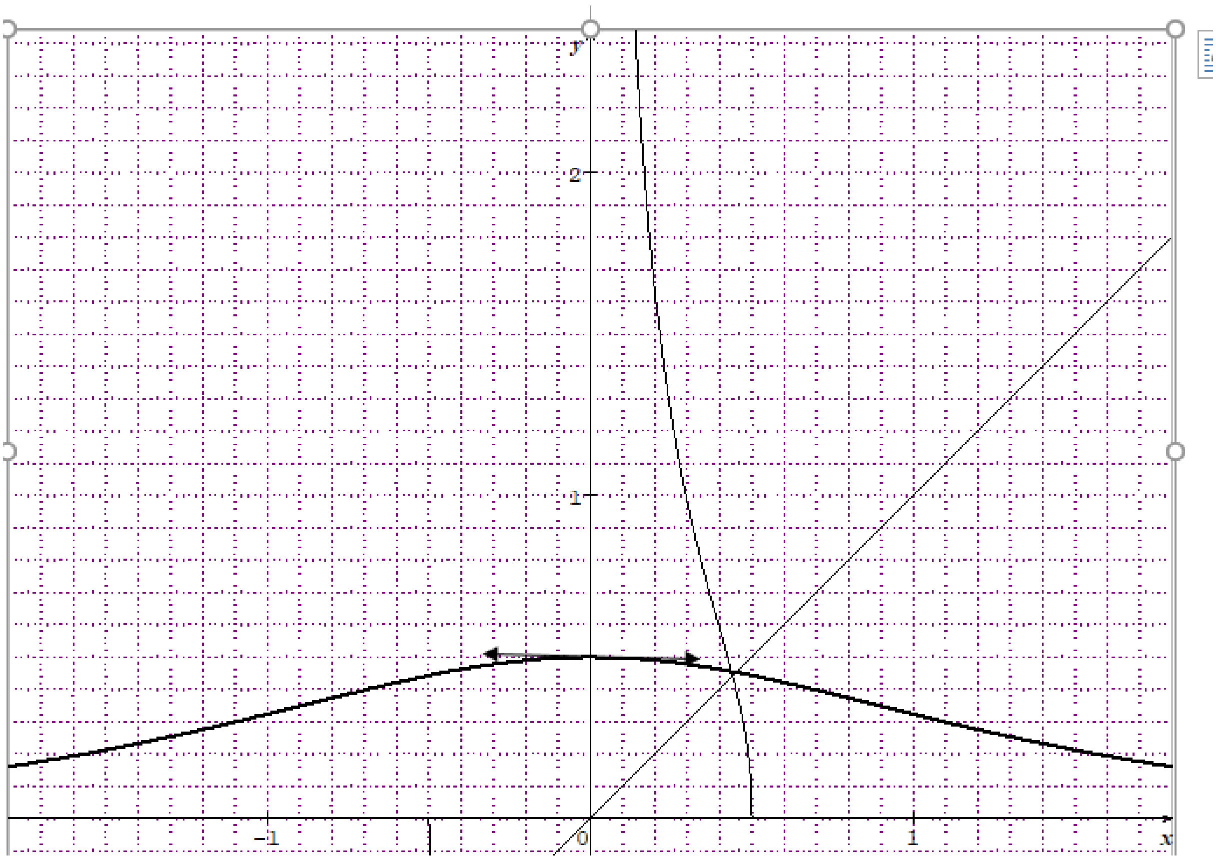
Pour tout $x \geq 0$, $f'_n(x) \leq 0$ et $f'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ donc f_n est strictement décroissante sur $[0\ ;+\infty[$. **0,5 pt**

3. Dressons le tableau de variations de f_n.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'_n(x)$		$+$	0	$-$	
$f_n(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0

0,5 pt

4. Traçons la courbe (C_1) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.



0,5 pt

Soit g_n la restriction de f_n à $[0\ ;\ +\infty[$.

5. a) Montrons que g_n est une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, g_n est continue et strictement décroissante, donc elle réalise une bijection de $[0\ ;\ +\infty[$ sur $\left]\boldsymbol{0}\ ;\ \boldsymbol{\frac{1}{2}}\right] = \boldsymbol{J}$. **0,25 pt**

b) Soit $g_n{}^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction g_n .
Explicitons $g_n{}^{-1}(x)$ pour tout x de $\left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$.

$g_n(x) = y$ avec $\begin{cases} x \in [0\ ;\ +\infty[\\ y \in \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right] \end{cases}$

$\frac{e^{nx}}{e^{2nx}+1} = y \quad \Leftrightarrow \quad y(e^{nx})^2 - e^{nx} + y = 0$, en posant $X = e^{nx}$,avec $X > 1$, l'équation devient

$\Leftrightarrow \quad yX^2 - X + y = 0$

$\Delta = 1 - 4y^2$, $\Delta \geq 0$ pour $y \in \left]0\ ;\ \frac{1}{2}\right]$

$X = \frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ ou $X = \frac{1-\sqrt{1-4y^2}}{2y}$ qui ne convient pas car étant plus petit que 1.

$e^{nx} = \boldsymbol{\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}}$ **,** $x = \frac{1}{n} ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4y^2}}{2y}\right)$

D'où $\boldsymbol{g_n{}^{-1}(x) = \frac{1}{n} ln\left(\frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x}\right)}$. **0,5 pt**

c) Traçons , dans le repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, la courbe $(C_{g_1{}^{-1}})$ représentative de la fonction $g_1{}^{-1}$.
Sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ les courbes $\left(C_{g_1}\right)$ et $(C_{g_1{}^{-1}})$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice. **0,25 pt**

PARTIE B

Soit F la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\ln(tanx)} f_1(t)dt$.

1. Calculons $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
$F(x) = \int_0^{\ln(tanx)} f_1(t)dt$, $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \int_0^0 f_1(t)dt = 0$.
$\boldsymbol{F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0}$ **0,25 pt**

2. Montrons que F est dérivable sur I puis déterminons $F'(x)$ pour tout $x \in I$.
La fonction $x \to \ln(tanx)$ est dérivable sur I comme composée de fonctions dérivables de plus la fonction f_1 est continue sur $[0\ ;\ +\infty[$ par conséquent F est dérivable sur I
Pour tout $x \in I$, $F'(x) = \frac{1+tan^2x}{tanx} f_1(\ln(tanx))$
$F'(x) = \frac{1+tan^2x}{tanx} \times \frac{e^{\ln(tanx)}}{e^{2\ln(tanx)}+1} = \frac{1+tan^2x}{tanx} \times \frac{tanx}{tan^2x+1}$
$\boldsymbol{F'(x) = 1}$. **0,5 pt**

3. Prouvons que :$\forall\ x \in I$, $F(x) = x - \frac{\pi}{4}$.
On a : $F'(x) = 1$ alors $F(x) = x + k$, or $F\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $\frac{\pi}{4} + k = 0$ donc $k = -\frac{\pi}{4}$
D'où $\boldsymbol{F(x) = x - \frac{\pi}{4}}$. **0,25 pt**

4. Démontrons que pour tout réel positif β, il existe un unique réel α de I tel que
$\beta = \ln(tan\alpha)$.
Posons $t(x) = \ln(tanx)$ avec $x \in I$. La fonction t est définie, continue et dérivable sur I.
$\forall\ x \in I$, $t'(x) > 0$ par suite t est strictement croissante sur I de plus $t(I) = [0\ ;\ +\infty[$.

t réalise une bijection de I sur $[0\,;\,+\infty[$ donc pour tout réel positif β, il existe un unique réel α de I tel que $t(\alpha)=\beta$ ou $\beta=\ln(tan\alpha)$. **0,5 pt**

5. Calculons l'aire $A(\beta)$ du domaine plan délimité par la courbe (C_1), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\beta$ puis $\lim\limits_{\beta\to+\infty} A(\beta)$.

$A(\beta)=\int_0^\beta f_1(t)\,dt\times U_a$, avec $U_a=16\ cm^2$

$A(\beta)=16\int_0^\beta f_1(t)\,dt=16\int_0^{\ln(tan\alpha)} f_1(t)\,dt$

Or $F(x)=\int_0^{\ln(tanx)} f_1(t)\,dt$

$F(\alpha)=\int_0^{\ln(tan\alpha)} f_1(t)\,dt=\alpha-\frac{\pi}{4}$

Par suite $A(\beta)=16F(\alpha)\ cm^2=16\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$ or $\alpha=tan^{-1}(e^\beta)$

Donc $\boldsymbol{A(\beta)=16\left(tan^{-1}(e^{\beta})-\frac{\pi}{4}\right)\ cm^2}$ **0,5 pt**

$\lim\limits_{\beta\to+\infty} A(\beta)=\lim\limits_{\beta\to+\infty} 16\left(tan^{-1}(e^\beta)-\frac{\pi}{4}\right)\ cm^2=16\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\ cm^2$

$\boldsymbol{\lim\limits_{\beta\to+\infty} A(\beta)=4\pi\ cm^2}$ **0,25 pt**

PARTIE C

Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions h_n et k_n définies par :

$$h_n(x)=\int_1^{f_1(x)} t(lnt)^n dt \quad \text{et} \quad k_n(x)=\int_1^{f_1(x)} t^n(lnt)dt \quad .$$

1. Calculons $h_1(x)$ puis $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x)$.

$h_1(x)=\int_1^{f_1(x)} tlnt\ dt$

Intégration par parties

Posons $U(t)=lnt \quad U'(t)=\frac{1}{t} \quad V'(t)=t \quad , V(t)=\frac{1}{2}t^2$

$h_1(x)=\left[\frac{1}{2}t^2lnt\right]_1^{f_1(x)}-\frac{1}{2}\int_1^{f_1(x)} tdt=\left[\frac{1}{2}t^2lnt\right]_1^{f_1(x)}-\frac{1}{4}[t^2]_1^{f_1(x)}$

$h_1(x)=\frac{1}{2}(f_1(x))^2ln(f_1(x))-\frac{1}{4}[(f_1(x))^2-1]$

$h_1(x)=\frac{1}{2}(f_1(x))^2\left[ln(f_1(x))-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{4}$

$\boldsymbol{h_1(x)=\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\left[ln\left(\frac{e^x}{e^{2x}+1}\right)-\frac{1}{2}\right]+\frac{1}{4}}$. **0,5 pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{2}\frac{e^{2x}}{(e^{2x}+1)^2}\left(ln\left(\frac{e^x}{e^{2x}+1}\right)-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\right]=\lim\limits_{X\to0^+}\frac{1}{2}X^2lnX-\frac{1}{4}X^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$

avec $X=\frac{e^x}{e^{2x}+1}$

$\boldsymbol{\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x)=\frac{1}{4}}$. **0,25 pt**

2. Montrons que, pour tout entier naturel non nul n :

❖ $h_{n+1}(x)=\frac{1}{2}[f_1(x)]^2[ln(f_1(x))]^{n+1}-\frac{n+1}{2}h_n(x)$

On a : $h_n(x)=\int_1^{f_1(x)} t(lnt)^n dt$

$h_{n+1}(x)=\int_1^{f_1(x)} t(lnt)^{n+1}dt$

Intégration par parties

Posons $U(t) = (lnt)^{n+1}$, $U'(t) = \frac{n+1}{t}(lnt)^n$; $V'(t) = t$, $V(t) = \frac{1}{2}t^2$

$$h_{n+1}(x) = \left[\frac{1}{2}t^2(lnt)^{n+1}\right]_1^{f_1(x)} - \frac{n+1}{2}\int_1^{f_1(x)} t(lnt)^n dt$$

D'où $\boldsymbol{h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[f_1(x)]^2[ln(f_1(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2}h_n(x)}$. **0,5pt**

- $k_n(x) = \int_1^{f_1(x)} t^n(lnt)dt$

Intégration par parties

Posons $U(t) = lnt$, $U'(t) = \frac{1}{t}$; $V'(t) = t^n$, $V(t) = \frac{1}{n+1}t^{n+1}$

$$k_n(x) = \frac{1}{n+1}[t^{n+1}lnt]_1^{f_1(x)} - \frac{1}{n+1}\int_1^{f_1(x)} t^n dt$$

$$k_n(x) = \frac{1}{n+1}[f_1(x)]^{n+1}[ln(f_1(x))] - \frac{1}{(n+1)^2}[t^{n+1}]_1^{f_1(x)}$$

D'où $\boldsymbol{k_n(x) = \frac{1}{n+1}[f_1(x)]^{n+1}[ln(f_1(x))] - \frac{1}{(n+1)^2}([f_1(x)]^{n+1} - 1)}$. **0,5pt**

3. Montrons, par récurrence, que la fonction h_n admet une limite finie notée l_n en $+\infty$ et que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $l_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}$.

- Pour $n = 1$, $l_1 = \frac{1}{4}$ et $\lim_{x\to+\infty} h_1(x) = \frac{1}{4}$.
- Supposons que h_n admet une limite finie notée l_n en $+\infty$ et $l_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}$.
- Montrons que h_{n+1} admet une limite finie notée l_{n+1} en $+\infty$ et $l_{n+1} = (-1)^{n+2}\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$.

On a : $h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[f_1(x)]^2[ln(f_1(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2}h_n(x)$

$$\lim_{x\to+\infty} h_{n+1}(x) = -\frac{n+1}{2}\lim_{x\to+\infty} h_n(x) = -\frac{n+1}{2}(-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} h_{n+1}(x) = -(-1)^{n+1}\frac{n+1}{2}\times\frac{n!}{2^{n+1}} = (-1)^{n+2}\frac{(n+1)!}{2^{n+2}}$$

Donc vrai au rang $n+1$

Par suite **h_n admet une limite finie notée l_n en $+\infty$ et que** $\forall\, \boldsymbol{n} \in \mathbb{N}^*$, $\boldsymbol{l_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}}$. **0,5 pt**

4. Montrons que : $\lim_{x\to+\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}$.

On a : $k_n(x) = \frac{1}{n+1}[f_1(x)]^{n+1}[ln(f_1(x))] - \frac{1}{(n+1)^2}([f_1(x)]^{n+1} - 1)$ et $\lim_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

$$\lim_{x\to+\infty} k_n(x) = \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{1}{n+1}[f_1(x)]^{n+1}[ln(f_1(x))] - \frac{1}{(n+1)^2}([f_1(x)]^{n+1} - 1)\right]$$

$$\lim_{x\to+\infty} k_n(x) = -\frac{1}{(n+1)^2}(-1) = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Par suite $\boldsymbol{\lim_{x\to+\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}}$. **0,25 pt**

PARTIE D :

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

On considère la fonction φ définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{\frac{t^2}{\pi} - t}{sint} & \text{si } t \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]. \\ \varphi(0) = -1 & \end{cases}$

1. On suppose que φ est dérivable sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ et que sa fonction dérivée φ' est continue sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$.

   Montrons qu'il existe un réel M tel que : $\quad \forall t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right], \quad |\varphi'(t)| \leq M.$

   φ' est continue sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ et toute fonction continue sur un intervalle fermé borné est bornée.

   Donc il existe un réel M tel que : $\quad \forall t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right], \quad |\varphi'(t)| \leq M.$ **0,5 pt**

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin(2n+1)\,t\,dt$.

   a) Montrons que : $I_n = \frac{1}{2n+1}\left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)\cos(2n+1)\,t\,dt\right)$.

   $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t)\sin(2n+1)\,t\,dt$

   Posons $u = \varphi(t)$ et $v' = sin(2n+1)t$ alors

   $u' = \varphi'(t)$ et $v = -\frac{1}{2n+1}cos(2n+1)t$ par conséquent

   $$I_n = \left[-\frac{1}{2n+1}\varphi(t)cos(2n+1)t\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)\cos(2\mathrm{n}+1)t\,dt$$

   $$I_n = \frac{1}{2n+1}\varphi(0) + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)\cos(2\mathrm{n}+1)t\,dt$$

   $I_n = -\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)\cos(2\mathrm{n}+1)t\,dt$ d'où

   $I_n = \frac{1}{2n+1}\left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t)\cos(2n+1)\,t\,dt\right)$. **0,5 pt**

   b) Déduisons-en que $|I_n| \leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \frac{\pi}{2}M\right)$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.

   $$|I_n| \leq \frac{1}{2n+1}\left|-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'^{(t)\cos(2n+1)}t\,dt\right|$$

   $$\leq \frac{1}{2n+1}\left(|-1| + \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'^{(t)\cos(2n+1)}t\,dt\right|\right)$$

   $$\leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \left|\int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'^{(t)}dt\right|\right) \leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left|\varphi'^{(t)}\right|dt\right)$$

   $$\leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} M dt\right) \leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \frac{\pi}{2}M\right).$$

$|I_n| \leq \frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{\pi}{2}M\right)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{2n+1}\left(1+\frac{\pi}{2}M\right) = 0$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0.$ **0,5 pt**

3. Soit x un réel de $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et soit n un entier naturel non nul.

   a) Exprimons la somme $\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)}$ en fonction de n et de x.
   $\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)}$ est la somme de n termes consécutifs d'une suite géométrique de premier terme e^{2ix} et de raison e^{2ix} par suite

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)} = e^{2ix}\left(\frac{1-\left(e^{2ix}\right)^{n}}{1-e^{2ix}}\right) = \frac{e^{2ix}\left(1-e^{2inx}\right)}{1-e^{2ix}} = \frac{\left(1-e^{2inx}\right)}{e^{-ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)}$$
$$= \frac{e^{inx}\left(e^{-inx}-e^{inx}\right)}{e^{-ix}\left(e^{-ix}-e^{ix}\right)} = \frac{sin(nx)}{sinx}e^{i(n+1)x}$$

0,5 pt

   b) Déduisons-en que : $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{sin[(2n+1)x]}{2sinx} - \frac{1}{2}$.

$$\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)} = \frac{sin(nx)}{sinx}e^{i(n+1)x}$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} (cos2kx + isin2kx) = \frac{sin(nx)}{sinx}(\cos(n+1)\,x + i\,sin(n+1)x)$$
$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \frac{sin(nx)}{sinx}\cos(n+1)\,x = \frac{\sin(nx)\cos(n+1)\,x}{sinx}.$$

   En utilisant la formule $sinacosb = \frac{1}{2}(\sin(a+b)+\sin(a-b)$ on obtient :

$$\sum_{k=1}^{n} \cos 2kx = \frac{\sin(nx)\cos(n+1)\,x}{sinx} = \frac{\sin(2n+1)\,x - sinx}{2sinx}$$
$$= \frac{\sin(2n+1)\,x}{2sinx} - \frac{1}{2}.$$

0,5 pt

4. a) Montrons que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt = \frac{1}{4k^2}.$

   Calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt$ en utilisant une double intégration par parties.

   En posant $u = \frac{t^2}{\pi} - t$ et $v' = \cos(2\mathrm{k}t)$ on a $u' = \frac{2t}{\pi} - 1$ et $v = \frac{1}{2k}\sin(2kt)$

   Par suite

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt = \left[\frac{1}{2k}[\sin(2kt)]\left(\frac{t^2}{\pi}-t\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2k}\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\sin(2\mathrm{k}t)\,dt$$
$$= -\frac{1}{2k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\sin(2\mathrm{k}t)\,dt$$

   calculons $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\sin(2\mathrm{k}t)\,dt$

   posons $u = \frac{2t}{\pi} - 1$ et $v' = \sin(2kt)$ alors $u' = \frac{2}{\pi}$ et $v = -\frac{1}{2k}\cos(2kt)$

   d'où $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\sin(2\mathrm{k}t)\,dt = \left[-\frac{1}{2k}[\cos(2kt)]\left(\frac{2t}{\pi}-1\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2k}\left(\frac{2}{\pi}\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt$

$$= -\frac{1}{2k} + \frac{1}{k\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2\mathrm{k}t)\,dt = -\frac{1}{2k} + \frac{1}{k\pi}\left[\frac{1}{2k}\sin(2kt)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{2k}$$

Donc

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt = -\frac{1}{2k}\left(-\frac{1}{2k}\right) = \frac{1}{4k^2}$$

0,5 pt

b) Montrons que $U_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

$$\sum_{k=1}^{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4k^2} = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)\cos(2\mathrm{k}t)\,dt = \frac{1}{4}U_n$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)\sum_{k=1}^{n}\cos(2\mathrm{k}t)\,dt = \frac{1}{4}U_n$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)\left[\frac{\sin(2n+1)x}{2sinx} - \frac{1}{2}\right]dt = \frac{1}{4}U_n$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}I_n - \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)dt = \frac{1}{4}U_n$$

$$\Rightarrow I_n - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{t^2}{\pi} - t\right)dt = \frac{1}{2}U_n \Rightarrow I_n - \left[\frac{t^3}{3\pi} - \frac{t^2}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}U_n$$

$$\Rightarrow I_n - \frac{\pi^2}{24} + \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2}U_n \Rightarrow U_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$$

$$\lim_{n\to+\infty} U_n = \lim_{n\to+\infty} 2I_n + \frac{\pi^2}{6} = \frac{\pi^2}{6}$$

0,5 pt