UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
E-mail : office@ucad.edu.sn
Site web : officedubac.sn

2024GS21RA0124
Durée : 4 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude. (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 : (4,5 points)

Soit n un entier naturel non nul. On note $d_n = PGCD\ (2^n - 1\ , 4^n - 1)$ et $p_n = PPCM\ (2^n - 1\ , 4^n - 1)$.

1. Calculer d_1, d_2, p_1 et p_2. **(1 pt)**
2. Prouver que d_6 et p_6 sont divisibles par 7. **(0,5 pt)**
3. Etablir une relation entre d_n et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **(0,25 pt)**
4. On pose : $M_n = 2^n - 1$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   - **a)** Vérifier que $M_3 \equiv 0\ [7]$. **(0,25 pt)**
   - **b)** Déterminer le reste de la division euclidienne de M_{3n+1} par 7. **(0,25 pt)**
   - **c)** Montrer que M_n divise $4^n - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. **(0,25 pt)**
   - **d)** En déduire que $d_n = M_n$ et $p_n = 4^n - 1$. **(0,5 pt)**
5. On pose $S_n = d_1 + d_2 + \cdots + d_n$ et $S'_n = p_1 + p_2 + \cdots + p_n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
   - **a)** Exprimer S_n et S'_n en fonction de n. **(1 pt)**
   - **b)** Montrer qu'on a : $3S'_n - 2S_n + n = 2^{n+2} \times d_n$. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 : (4 ,5 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\ ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$.

Soit a un réel strictement positif. On considère les points $A(0\ , 0\ , \sqrt{2})$, $B(a\ , 0\ , 0)$ et $C\left(0\ , \frac{4}{a}\ , 0\right)$.

1. Exprimer en fonction de a les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$. **(0,5 pt)**
2. **a)** Montrer qu'une équation du plan (ABC) est : $4x + a^2y + 2a\sqrt{2}\,z - 4a = 0$. **(0,5 pt)**

   b) On note d la distance du point O au plan (ABC).

   Montrer que : $\mathrm{d} = 1 - \frac{(a-2)^2}{a^2+4}$. **(0,5 pt)**

   c) Déterminer la valeur de a pour laquelle la distance d est maximale. **(0,25 pt)**

3. **a)** Montrer que le volume du tétraèdre $OABC$ est égal à $\frac{2\sqrt{2}}{3}$. **(0,5 pt)**

   b) En déduire que l'aire du triangle ABC est supérieure ou égale à $2\sqrt{2}$. **(0,5 pt)**

   c) Déterminer les coordonnées des points B et C pour lesquelles l'aire du triangle ABC est égale à $2\sqrt{2}$. **(0,5 pt)**

4. Soit le plan $(\mathcal{P})$ d'équation : $x + y + \sqrt{2}\ z = 2$.

Déterminer les coordonnées des points M, N et Q, points d'intersection respectifs du plan $(\mathcal{P})$ avec les axes $(O\ ; \vec{\imath})$, $(O\ ; \vec{\jmath})$ et $(O\ ; \vec{k})$. **(0,75 pt)**

5. Soit (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.
Montrer que le plan $(\mathcal{P})$ et la sphère (S) sont tangents en un point I dont on déterminera les coordonnées. **(0,5 pt)**

PROBLEME (11 points)

Soit n un entier naturel non nul, on considère la fonction f_n définie par : $f_n(x) = \frac{e^{nx}}{e^{2nx}+1}$ et (C_n) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ d'unité graphique 4 cm.

PARTIE A (2,75 points)

1. Etudier la parité de f_n. **(0,25 pt)**
2. Etudier les variations de f_n sur $[0\,,+\infty[$. **(0,5 pt)**
3. Dresser le tableau de variations de f_n. **(0,5 pt)**
4. Tracer la courbe (C_1) dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{\imath},\ \vec{\jmath})$. **(0,5 pt)**
5. Soit g_n la restriction de f_n à $[0\,,+\infty[$.
   a) Montrer que g_n est une bijection de $[0\,,+\infty[$ vers un intervalle J à préciser. **(0,25 pt)**

   b) Soit ${g_n}^{-1}$ la bijection réciproque de la fonction g_n . Expliciter ${g_n}^{-1}(x)$ pour tout x de J. **(0,5 pt)**

   c) Tracer $(C_{{g_1}^{-1}})$ courbe représentative de la fonction ${g_1}^{-1}$, dans le plan muni du repère $(O\,;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$.**(0,25 pt)**

PARTIE B (2,25 points)

Soit F la fonction définie sur $I = \left[\frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right[$ par : $F(x) = \int_0^{\ln(\tan x)} f_1(t)dt$.

1. Calculer $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$. **(0,25 pt)**
2. Montrer que F est dérivable sur I et déterminer $F'(x)$ pour tout $x \in I$. **(0,5 pt)**
3. Prouver que : $\forall x \in I, \quad F(x) = x - \frac{\pi}{4}$. **(0,25 pt)**
4. Démontrer que pour tout réel positif β, il existe un unique réel α de I tel que $\beta = \ln(\tan\alpha)$. **(0,5 pt)**
5. **a)** Calculer l'aire $\mathcal{A}(\beta)$ du domaine plan délimité par la courbe (Cf), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = \beta$. **(0,5 pt)**

   b) Calculer $\lim\limits_{\beta\to+\infty} A(\beta)$ puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,25 pt)**

PARTIE C (2,5 points)

Pour tout entier naturel non nul n, on considère les fonctions h_n et k_n définies par :

$$h_n(x) = \int_1^{f_1(x)} t(\ln t)^n dt \qquad \text{et} \qquad k_n(x) = \int_1^{f_1(x)} t^n(\ln t)dt \quad .$$

1. Calculer $h_1(x)$, puis $\lim\limits_{x\to+\infty} h_1(x)$. **0,75 pt**
2. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, on a :
   i) $h_{n+1}(x) = \frac{1}{2}[f_1(x)]^2[\ln(f_1(x))]^{n+1} - \frac{n+1}{2}h_n(x)$; **(0,5 pt)**
   ii) $k_n(x) = \frac{1}{n+1}[f_1(x)]^{n+1}[\ln(f_1(x))] - \frac{1}{(n+1)^2}([f_1(x)]^{n+1} - 1)$. **(0,5 pt)**
3. Montrer, par récurrence, que la fonction h_n admet une limite finie notée l_n en $+\infty$ et qu'on a :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad l_n = (-1)^{n+1}\frac{n!}{2^{n+1}}\cdot$$ **(0,5 pt)**
4. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} k_n(x) = \frac{1}{(n+1)^2}\cdot$ **(0,25 pt)**

…/…3

PARTIE D **(3,5 points)**

Pour tout entier naturel n non nul, on pose $U_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$.

On considère la fonction φ définie sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\begin{cases} \varphi(t) = \dfrac{\frac{t^2}{\pi} - t}{\sin t} & \text{si } t \in \left]0\,,\frac{\pi}{2}\right] \\ \varphi(0) = -1 \end{cases}$.

1. On suppose que φ est dérivable sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$ et que sa fonction dérivée φ' est continue sur $\left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right]$.

Montrer qu'il existe un réel M tel que : $\forall t \in \left[0\,,\,\frac{\pi}{2}\right], \quad |\varphi'(t)| \leq M.$ **(0,5 pt)**

2. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi(t) \sin(2n+1)\, t\, dt.$

a) Montrer que : $I_n = \frac{1}{2n+1}\left(-1 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \varphi'(t) \cos(2n+1)\, t\, dt\right).$ **(0,5 pt)**

b) En déduire que $|I_n| \leq \frac{1}{2n+1}\left(1 + \frac{\pi}{2} M\right)$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 0.$ **(0,5 pt)**

3. Soient x un réel de l'intervalle $\left]0\,,\frac{\pi}{2}\right]$ et n un entier naturel non nul.

a) Exprimer la somme $\sum_{k=1}^{n} e^{i(2kx)}$ en fonction de n et de x. **(0,5 pt)**

b) En déduire que : $\sum_{k=1}^{n} \cos(2kx) = \frac{\sin[(2n+1)x]}{2\sin x} - \frac{1}{2}.$ **(0,5 pt)**

4. **a)** Montrer que : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{t^2}{\pi} - t\right) \cos(2kt)\, dt = \frac{1}{4k^2}\cdot$ **(0,5 pt)**

(*On pourra utiliser une double intégration par parties.*)

b) Montrer alors que $U_n = 2I_n + \frac{\pi^2}{6}$ puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n.$ **(0,5 pt)**