UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
❑❑⬥❑❑
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail :office@ucad.sn
Site web :officedubac.sn

2024GS26RA0132
Durée : 4 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (05 points)

Soit (U_n) la suite définie par : $\begin{cases} U_o = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{3+U_n^2},\ n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2. **(0,5 pt)**
2) Montrer par récurrence que (U_n) est minorée par 0. **(0,75 pt)**
3) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ U_{n+1} \leq \frac{1}{3}U_n$. **(0,5 pt)**
   a) En déduire que (U_n) est décroissante. **(0,25 pt)**
   b) La suite (U_n) converge-t-elle ? Justifier la réponse. **(0,5 pt)**
   c) Etablir par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq \left(\frac{1}{3}\right)^n$. **(0,5 pt)**
   d) Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. **(0,25 pt)**
4) On pose $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n$.
   a) Montrer que la suite (S_n) est croissante. **(0,5 pt)**
   b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, S_n \leq \frac{3}{2}\left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right]$. **(0,75 pt)**
   c) Déduire des questions a) et b) que (S_n) est bornée. **(0,5 pt)**

EXERCICE 2 (05 points)

Dans le cadre de ses fêtes de fin d'année, le gouvernement scolaire (GS) d'un établissement veut organiser un jeu sans mise qui lui permettra de gagner de l'argent. Pour cela, il pense à un jeu de tirage de jetons et décide de composer leur urne de deux jetons jaunes, de trois jetons rouges et de jetons verts dont il ignore encore le nombre.

Les règles du jeu sont les suivantes : le joueur tire un jeton de l'urne ;

- si le jeton tiré est jaune, le GS perd et remet 1500 fCFA au joueur.
- si le jeton tiré est rouge, le GS gagne et le joueur lui remet 900 fCFA.
- si le jeton tiré est vert, il le remet dans l'urne, puis tire un autre : si ce jeton est jaune, le GS perd et remet 500 fCFA au joueur; si ce jeton est rouge le GS gagne et le joueur lui remet 500 fCFA et si ce jeton est encore vert, le GS ne gagne ni ne perd.

Les tirages ont la même chance de se réaliser et sont indépendants.

En utilisant les connaissances mathématiques au programme, aide le GS à déterminer le nombre minimal de jetons verts à introduire dans l'urne pour que le jeu lui soit favorable.

.../... 2

Epreuve du 1^er^ groupe

PROBLEME **(10 points)**

PARTIE A **(02,25 points)**

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x) = x - \ln x$.

1) Etudier les limites de g en 0^+ et en $+\infty$. **(0,5 pt)**
2) Calculer $g'(x)$ sur $]0,+\infty[$ et étudier son signe. **(0,5 pt)**
3) Dresser le tableau de variations de g. **(0,5 pt)**
4) Montrer que g admet un extrémum sur $]0,+\infty[$. **(0,5 pt)**
   En déduire que : $\forall x \in \,]0,+\infty[,\ g(x) \neq 0$. **(0,25 pt)**

PARTIE B **(07,75 points)**

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x - \ln x} + 1 & \text{si } \ x > 0 \\ (x+1)^2 e^{-x} & \text{si } \ x \leq 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2cm.

1) Montrer que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}$. **(0,5 pt)**
2) Etudier les limites de f aux bornes de D_f et en déduire les asymptotes éventuelles à (C_f). **(01 pt)**
3) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu. **(0,75 pt)**
4) Démontrer que f est continue en 0. **(0,5 pt)**
5) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(01 pt)**
6) a) Calculer $f'(x)$ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. **(01 pt)**
   b) Etudier le signe de $f'(x)$ et dresser le tableau de variations de f. **(01 pt)**
7) Construire (C_f). **(01 pt)**
8) On pose $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ où a, b et c sont des réels.
   a) Déterminer a, b et c pour que F soit une primitive de f sur $]-\infty, 0]$. **(0,5 pt)**
   b) Calculer en cm^2 l'aire $\mathcal{A}(E)$ de la partie E du plan comprise entre l'axe des abscisses, (C_f) et les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. **(0,5 pt)**