OFFICE DU BACCALAUREAT

E.mail :office@ucad.sn
siteweb :officedubac.sn

Durée : 4 heures
Séries: S2-S2A-S4-S5 – Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 **(03 points)**

1) Soit a un nombre rationnel strictement positif et n un entier naturel. Donner les limites suivantes :

a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$. **(1,5 pt)**

2) Donner les primitives des fonctions suivantes :

a) $(exp\circ f)f'$ b) $\frac{f'}{f}$. **(1,5 pt)**

EXERCICE 2 **(04 points)**

Un jeune agriculteur décide de pratiquer de la culture sous serre dans son champ. A cet effet, il choisit dans son plan de représentation un repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$. Il place dans ce repère deux points A et B dont les affixes respectives z_A et z_B sont des racines du polynôme P défini par :

$$P(z) = 2\,z^3 - 3\,(1+i)\,z^2 + 4i\,z + 1 - i, \text{ où } z \in \mathbb{C}.$$

Son objectif est de pratiquer sa culture sous serre dans l'ensemble (E) des points M de son plan de représentation tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\| \leq 2$, qui contient un point du segment $[AB]$.

1) Vérifier que 1 et i sont des racines de P. **(0,5 pt)**
2) Déterminer le polynôme g tel que $P(z) = (z-1)\,(z-i)\,g(z)\cdot$ **(0,5 pt)**
3) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$. **(0,5 pt)**
4) On pose $z_A = 1, z_B = i$ et $z_C = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$.
   a) Placer les points A, B et C d'affixes respectives z_A, z_B et z_C dans le repère orthonormal $(O;\vec{u},\vec{v})$ en choisissant comme unité graphique 4 cm. **(0,75 pt)**
   b) Démontrer que C est le milieu de $[AB]$, puis que C appartient à l'ensemble (E). **(0,5 pt)**
   c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1)\,;\,(B,1)\,;\,(O,2)\}$, puis placer G. **(0,5 pt)**
5) Déterminer puis construire l'ensemble (E) des points M du plan tels que $\|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + 2\,\overrightarrow{MO}\| \leq 2$. **(0,5 pt)**
6) Le jeune agriculteur atteindra-t-il son objectif ? **(0,25 pt)**

EXERCICE 3 **(04 points)**

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 6 \\ U_{n+1} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}U_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}.$

1) Déterminer U_1 et U_2. **(0,5 pt)**
2) Démontrer par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ U_n \geq \sqrt{3}$. **(01 pt)**
3) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{3}{4}\,x$.
   a) Etudier le sens de variations de f. **(01 pt)**
   b) En déduire par récurrence que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **(0,5 pt)**
4) Démontrer que $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. **(01pt)**

PROBLEME **(09 pts)**

PARTIE A **(02 pts)**

On considère l'équation différentielle (E) : $\frac{1}{2}\,y' + y = 3\,e^{-2x} + 2$.

1) Résoudre l'équation différentielle (E') : $\frac{1}{2}\,y' + y = 0$. **(0,25 pt)**
2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\,e^{-2x} + b$ où a et b sont des réels.
   Déterminer a et b pour que h soit une solution de (E). **(0,5 pt)**
3) a) Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$. Posons $a = 6$ et $b = 2$.
   Démontrer que g est solution de (E) si et seulement si $g - h$ est solution de (E'). **(0,5 pt)**

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E). **(0,5 pt)**

4) Déterminer la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O. **(0,25 pt)**

PARTIE B **(07 pts)**

Soient f la fonction définie par :

$$f(x)=\begin{cases}(6x-2)e^{-2x}+2 & \text{si } x\leq 0\\ \dfrac{x+\ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x>0\end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) Justifier que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$. **(0,5 pt)**
2) Etudier les limites aux bornes de D_f et interpréter graphiquement, si possible, les résultats obtenus. **(01,5 pt)**
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 pt)**
4) Etudier la continuité de f en 0. **(0,5 pt)**
5) Etudier la dérivabilité de f en 0 et interpréter géométriquement les résultats obtenus. **(01 pt)**
6) Calculer $f'(x)$ puis étudier son signe sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[\backslash\{1\}$. **(0,75 pt)**
7) Dresser le tableau de variations de f. **(0,5 pt)**
8) Montrer sur l'intervalle $]1\,,2[$ que l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α et que $1,2<\alpha<1,3$. **(0,5 pt)**
9) Construire (C_f) et ses asymptotes. **(0,75 pt)**
10) Calculer en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x=2, x=3$, $y=-1$ et la courbe (C_f) de f. **(0,5 pt)**

Epreuve du 1^er groupe

Grille de correction des copies des élèves

Pour la correction des copies, il faudra tenir compte, pour chaque réponse à une question de l'épreuve de :

- ✓ ***La justesse du raisonnement pour 50% de la note. Si le raisonnement est acceptable mais insuffisant, on donne 25% de la note.***
- ✓ ***L'exactitude des résultats attendus et qui sont en adéquation avec le raisonnement pour 50% de la note.***

CORRIGE

EXERCICE 1

1) Le nombre rationnel strictement positif a et l'entier naturel n sont des données inutiles. Pour le calcul de limite, on a **d'après les limites usuelles** :
   a) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$ b) $\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$ **(0,75+0,75 pt)**
2) Une primitive de la fonction :
a) $(\boldsymbol{exp \circ f})\boldsymbol{f'}$.
   On sait que la dérivée de la composée $exp \circ f$ est la fonction $(exp \circ f)f'$. Donc une primitive de la fonction $x \mapsto (exp \circ f(x))f'(x)$ est la fonction $x \mapsto exp \circ f(x) + c$, avec c une constante. **(0,75 pt)**
b) $\frac{f'}{f}$.
   On sait que si f est non nulle alors la dérivée de la composée $\ln(|f|)$ est la fonction $\frac{f'}{f}$.
   Donc une primitive de la fonction $x \mapsto \frac{f'(x)}{f(x)}$ si f est non nulle, est la fonction $x \mapsto \ln(|f(x)| + k$ avec $f(x) \neq 0$ et k une constante. **(0,75 pt)**

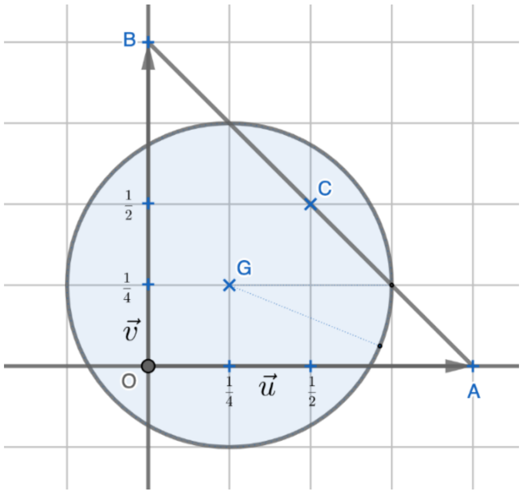
EXERCICE 2

1) $p(1) = 2(1)^3 - 3(1+i)(1)^2 + 4i(1) + 1 - i.$
   $P(1) = 2 - 3 - 3i + 4i + 1 - i = 0$, donc 1 est une racine de P. **(0,25 pt)**
   $P(i) = 2i^3 - 3(1+i)\,i^2 + 4i\,(i) + 1 - i = -2i + 3(1+i) - 4 + 1 - i$
   $P(i) = -2i + 3 + 3i - 4 + 1 - i = 0,$ donc i est une racine de P. **(0,25 pt)**
2) *L'élève pourra déterminer $g(z)$ par division euclidienne, par la méthode d'identification des coefficients ou par la méthode de Hörner.*
   Utilisons dans ce tableau deux fois la méthode de Hörner

	2	$-3-3i$	$4i$	$1-i$
1		2	$-1-3i$	$-1+i$
	2	$-1-3i$	$-1+i$	0
i		$2i$	$-i+1$	
	2	$-1-i$	0	

   D'où $g(z) = 2z - 1 - i$ et $P(z) = (z-1)(z-i)(2z-1-i)$. **(0,5 pt)**
3) Les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$ sont $1, i$ et la racine de g.
   $g(z) = 0 \Leftrightarrow 2z - 1 - i = 0 \Leftrightarrow 2z = 1 + i \Leftrightarrow z = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$
   $S = \left\{1, i, \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right\}.$ **(0,5 pt)**

4) a)



b) *L'élève pourra démontrer que C est le milieu de $[AB]$ en utilisant les affixes respectives des points A, B et C ou en utilisant leurs coordonnées respectives.*

En utilisant les affixes respectives des points A, B et C on a $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{1+i}{2}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i=z_C$ donc C est le milieu de $[AB]$. **(0,25 pt)**

Démontrons que C appartient à l'ensemble (E).

On a $\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+2\,\overrightarrow{CO}\|=\|2\,\overrightarrow{CO}\|=2|z_C|=\sqrt{2}$. Ce qui implique que $\|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+2\,\overrightarrow{CO}\|\leq 2$.

D'où C appartient à l'ensemble (E). **(0,25 pt)**

c) Déterminer l'affixe z_G du point G barycentre du système $\{(A,1)\,;\,(B,1)\,;\,(O,2)\}$.

On a : $z_G=\frac{z_A+z_B+2z_O}{1+1+2}=\frac{1+i}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}i$. **(0,25 pt)**

Voir figure pour le placement du point G dans le repère. **(0,25 pt)**

5) Comme G est le barycentre de $\{(A,1)\,;\,(B,1)\,;\,(O,2)\}$, donc pour tout point M du plan, on a :

$$\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MO}=(1+1+2)\,\overrightarrow{MG}\implies\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MO}=4\,\overrightarrow{MG}.$$

$\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\,\overrightarrow{MO}\|\leq 2\iff\|4\,\overrightarrow{MG}\|\leq 2\iff 4\|\overrightarrow{MG}\|\leq 2\iff MG\leq\frac{1}{2}\iff M$ appartient au disque de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$. D'où (E) est le disque de centre G et de rayon $\frac{1}{2}$. **(0,25 pt)**

Pour la construction de (E) voir figure. **(0,25 pt)**

6) Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit les deux points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point C milieu de $[AB]$, d'affixe $z_C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. **(0,25 pt)**

Les élèves pourront donner d'autres réponses possibles. A savoir :

- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=1$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point C milieu de $[AB]$, d'affixe $z_C=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A=1$ et $z_B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point B.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$ et $z_B=1$). Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point A.
- ✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A=i$ et $z_B=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$. Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point B.

✓ Oui le jeune agriculteur atteindra son objectif s'il choisit deux points A et B d'affixes respectives $z_A = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\, i$ et $z_B = i$). Il pourra pratiquer sa culture sous serre dans la partie de son champ (E) sous forme de disque qui contient au moins le point A.

EXERCICE 3

1) Déterminons U_1 et U_2

$U_1 = \frac{1}{U_0} + \frac{3}{4}\, U_0 = \frac{1}{6} + \frac{3}{4}\,(6) = \frac{1}{6} + \frac{9}{2} = \frac{1}{6} + \frac{27}{6} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$. **(0,25 pt)**

$U_2 = \frac{1}{U_1} + \frac{3}{4}\, U_1 = \frac{1}{\frac{14}{3}} + \frac{3}{4} \times \frac{14}{3} = \frac{3}{14} + \frac{7}{2} = \frac{3}{14} + \frac{49}{14} = \frac{52}{14} = \frac{26}{7}$. **(0,25 pt)**

2) Démontrons par récurrence que : $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \ U_n \geq \sqrt{3}$.

- Vérifions que $U_0 \geq \sqrt{3}$.

On a $U_0 = 6$. Or $6 \geq \sqrt{3}$, donc $U_0 \geq \sqrt{3}$.

- Démontrons que si $U_n \geq \sqrt{3}$ alors $U_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

Supposons que $U_n \geq \sqrt{3}$ et montrons que $U_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

$U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{1}{U_n} + \frac{3}{4}\, U_n - \sqrt{3} = \frac{4+3\, U_n^2 - 4\sqrt{3}\, U_n}{4\, U_n}$.

$U_{n+1} - \sqrt{3} = \frac{3\, U_n^2 - 4\sqrt{3}\, U_n + 4}{4\, U_n} = \frac{(\sqrt{3}\, U_n - 2)^2}{4\, U_n}$.

Or $U_n \geq \sqrt{3}$ implique que $(\sqrt{3}\, U_n - 2)^2 \geq 0$ et $U_n > 0$.

Ce qui donne $\frac{(\sqrt{3}\, U_n - 2)^2}{4\, U_n} \geq 0 \implies U_{n+1} - \sqrt{3} \geq 0 \implies U_{n+1} \geq \sqrt{3}$.

- Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}$. **(01 pt)**

3) a) f est une fonction rationnelle, donc f est dérivable en tout point de son ensemble de définition. Par conséquent f est dérivable sur $]0, +\infty[$. **(0,25 pt)**

$\forall\, x \in\ ]0, +\infty[, f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{3}{4} = \frac{-4+3x^2}{4\, x^2} = \frac{3\, x^2 - 4}{4\, x^2}$.

$f'(x) = \frac{(\sqrt{3}\, x + 2)(\sqrt{3}\, x - 2)}{4\, x^2}$. **(0,25 pt)**

$\forall x \in\ ]0, +\infty[, \sqrt{3}x + 2 > 0$ et $4\, x^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\sqrt{3}x - 2$.

$\sqrt{3}x - 2 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{3}x = 2 \Leftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

x	0		$\frac{2\sqrt{3}}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow x \in \left]\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$

$f'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in \left]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right[$

(0,25 pt)

f est strictement croissante sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ et strictement décroissante sur $\left]0, \frac{2\sqrt{3}}{3}\right]$. **(0,25 pt)**

b) Déduisons-en par récurrence que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

- Vérifions que $U_1 < U_0$.

$U_0 = 6\ et\ U_1 = \frac{14}{3}$. Or $\frac{14}{3} < 6$, donc $U_1 < U_0$.

- Supposons que $U_{n+1} < U_n$ et montrons que $U_{n+2} < U_{n+1}$.

On sait que $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3}$. Or $\sqrt{3} > \frac{2\sqrt{3}}{3}$, donc $U_n > \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

$\implies U_n \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$. De même $U_{n+1} \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$.

On a $U_n \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ et $U_{n+1} \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$. f étant strictement croissante sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, donc si $U_{n+1} < U_n$ alors $f(U_{n+1}) < f(U_n)$ ·
Or $f(U_{n+1}) = U_{n+2}$ et $f(U_n) = U_{n+1}$, donc $U_{n+2} < U_{n+1}$.

- Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}, U_{n+1} < U_n$. D'où $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement décroissante. **(0,5 pt)**

4) D'après la question 2), $\forall\, n \in \mathbb{N}$ on a $U_n \geq \sqrt{3}$. Donc la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est minorée par $\sqrt{3}$ · Or $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante, donc $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente. **(0,5 pt)**
Posons $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.
$\forall\, n \in \mathbb{N}, U_n \geq \sqrt{3} \Longrightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} U_n \geq \sqrt{3} \Longrightarrow \ell \geq \sqrt{3} \Longrightarrow \ell \in \left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$ ·
Or f est continue sur $\left[\frac{2\sqrt{3}}{3}, +\infty\right[$, donc f est continue en ℓ ·
Par hypothèse, $U_0 = 6$ et $U_{n+1} = f(U_n)$. On a aussi, $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \ell$ et f est continue en ℓ, donc ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
$f(x) = x \iff \frac{1}{x} + \frac{3}{4}\, x = x \iff \frac{4 + 3\,x^2}{4\,x} = x.$
$\iff 4 + 3\,x^2 = 4\,x^2 \iff 4 = 4\,x^2 - 3\,x^2 \iff 4 = x^2.$
$\iff x = 2$ ou $x = -2$.
Or $x > 0$; donc $x = 2$. D'où $\ell = 2$. **(0,5 pt)**

PROBLEME

PATIE A

1) Résolvons l'équation différentielle (E') : $\frac{1}{2}\, y' + y = 0$.
$$(E'): \frac{1}{2}\, y' = -y \iff y' = -2y \iff y(x) = \lambda\, e^{-2x} \text{ où } \lambda \in \mathbb{R}\ \cdot$$
D'où l'ensemble des solutions de (E') est l'ensemble des fonctions y définies par :
$y(x) = \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,25 pt)**

2) Soit h une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = ax\, e^{-2x} + b$ où a et b sont des réels.
Déterminons a et b pour que h soit une solution de (E).
On a $h'(x) = ae^{-2x} - 2ax\, e^{-2x}$; $\frac{1}{2}\, h'(x) = \frac{1}{2} ae^{-2x} - axe^{-2x}$ ·
$$\frac{1}{2} h'(x) + h(x) = \frac{1}{2} ae^{-2x} - ax\, e^{-2x} + axe^{-2x} + b = \frac{1}{2} ae^{-2x} + b.$$
h est solution de $(E) \iff \frac{1}{2}\, h'(x) + h(x) = 3e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$ ·
$$\iff \begin{cases} \frac{1}{2} a = 3 \\ b = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 6 \\ b = 2 \end{cases}$$
$a = 6$ et $b = 2$. **(0,5 pt)**

3) a) g est solution de $(E) \iff \frac{1}{2}\, g'(x) + g(x) = 3\, e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
Or $\frac{1}{2}\, h'(x) + h(x) = 3e^{-2x} + 2, \forall\, x \in \mathbb{R}$. Donc
g est solution de $(E) \iff \frac{1}{2} g'(x) + g(x) = \frac{1}{2} h'(x) + h(x), \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\iff \frac{1}{2}\, g'(x) - \frac{1}{2}\, h'(x) + g(x) - h(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\iff \frac{1}{2}\, (g-h)'\,(x) + (g-h)\,(x) = 0, \forall\, x \in \mathbb{R}$.
$\iff g - h$ est solution de (E'). **(0,5 pt)**

b) Déduisons-en l'ensemble des solutions de (E).
Soit g une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
g est solution de $(E) \iff g - h$ est solution de $(E') \iff g(x) - h(x) = \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.

$\Leftrightarrow g(x) = h(x) + \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g(x) = 6xe^{-2x} + 2 + \lambda\, e^{-2x}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow g(x) = (6x + \lambda)e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
L'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des fonctions g définies sur $\mathbb{R}$ et de la forme
$g: x \longmapsto (6x + \lambda)e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$. **(0,5 pt)**

4) Déterminons la solution k de (E) dont la courbe représentative (C_k) dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O.
k est solution de $(E) \Leftrightarrow k(x) = (6x + \lambda)\, e^{-2x} + 2$ où $\lambda \in \mathbb{R}$.
De plus, la courbe représentative (C_k) de k dans un repère orthonormal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ passe par le point O équivaut à $O(0,0) \in (C_k)$
$\Leftrightarrow k(0) = 0 \Leftrightarrow \lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2$.
D'où $k(x) = (6x - 2)e^{-2x} + 2$. **(0,25 pt)**

PARTIE B

Soient f la fonction définie par :

$$f(x) = \begin{cases} (6x-2)e^{-2x} + 2 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x + \ln|1-x|}{1-x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé d'unité graphique $2cm$.

1) Justifions que l'ensemble de définition D_f de f est égal à $\mathbb{R}\backslash\{1\}$.
$f(x)$ existe $\Leftrightarrow x \leq 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ 1 - x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \leq 0$ ou $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow x \neq 1$.
D'où $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$. **(0,5 pt)**

2) Etudions les limites aux bornes de D_f et interprétons graphiquement, si possible, les résultats obtenus.
$\lim\limits_{x \to -\infty} 6x - 2 = \lim\limits_{x \to -\infty} 6x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} -2x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-2x} = +\infty$
D'où $\lim\limits_{x \to -\infty} (6x-2)e^{-2x} = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} (6x-2)e^{-x} + 2 = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$. **(0,25 pt)**

x	0		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	

$\lim\limits_{x \to 1} 1 - x = 0$

$\lim\limits_{x \to 1} x = 1$; $\lim\limits_{x \to 1} |1-x| = 0^+$; $\lim\limits_{x \to 1} \ln|1-x| = -\infty$; $\lim\limits_{x \to 1} x + \ln|1-x| = -\infty$

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to1^-} x + \ln|1-x| = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^-} 1 - x = 0^+ \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^-} f(x) = -\infty.$$ **(0,25 pt)**

$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to1^+} x + \ln|1-x| = -\infty \\ \lim\limits_{x\to1^+} 1 - x = 0^- \end{array}\right\} \Rightarrow \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = +\infty.$$ **(0,25 pt)**

La droite d'équation $x = 1$ est asymptote verticale à (C_f). **(0,25 pt)**
Etudions la limite de f en $+\infty$.
Supposons que $x > 1$.
Alors $1 - x < 0$ et $|1 - x| = x - 1$.

$$f(x) = \frac{x + \ln(x-1)}{1-x} = \frac{x}{1-x} + \frac{\ln(x-1)}{1-x} = \frac{x}{1-x} - \frac{\ln(x-1)}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{1-x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{-x}=-1.$$

Posons $t=x-1$. $x\to+\infty \iff t\to+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x-1)}{x-1}=\lim_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$; $\lim_{x\to+\infty}f(x)=-1$. **(0,25 pt)**

La droite d'équation $y=-1$ est asymptote horizontale à (C_f) en $+\infty$. **(0,25 pt)**

3) Déterminons $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}$ et interprétons graphiquement le résultat.

Supposons que $x<0$.

Alors $\frac{f(x)}{x}=\frac{(6x-2)e^{-2x}+2}{x}=\left(\frac{6x-2}{x}\right)e^{-2x}+\frac{2}{x}$.

On a $\lim_{x\to-\infty}\frac{6x-2}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{6x}{x}=6$ et $\lim_{x\to-\infty}e^{-2x}=+\infty$.

$\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{6x-2}{x}\right)e^{-2x}=+\infty$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x}=0$; $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. **(0,25 pt)**

(C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées en $-\infty$. **(0,25 pt)**

4) Etudions la continuité de f en 0.

On a $f(0)=[6(0)-2]e^{-2(0)}+2=-2+2=0$.

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(6x-2)e^{-2x}+2=[6(0)-2]e^{-2(0)}+2=0$.

$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{x+\ln|1-x|}{1-x}=\frac{0+\ln|1-0|}{1-0}=\frac{0}{1}=0$.

$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^+}f(x)=0\Rightarrow\lim_{x\to0}f(x)=0$.

Or $f(0)=0$, donc

$\lim_{x\to0}f(x)=f(0)$; *d'où* f est continue en 0. **(0,5 pt)**

5) Etudions la dérivabilité de f en 0.

Supposons que $x<0$.

On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{(6x-2)e^{-2x}+2}{x}=6e^{-2x}+\frac{-2e^{-2x}+2}{x}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=6e^{-2x}-2\left(\frac{e^{-2x}-1}{x}\right)=6e^{-2x}+4\left(\frac{e^{-2x}-1}{-2x}\right)$

On a d'une part, $\lim_{x\to0^-}6e^{-2x}=6$.

D'autre part, posons $t=-2x$.

$x\to0^-\iff t\longrightarrow0^+$

$\lim_{x\to0^-}\frac{e^{-2x}-1}{-2x}=\lim_{t\to0^+}\frac{e^t-1}{t}=1$; $\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=6+4(1)$. Ce qui implique que

$\lim_{x\to0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=10$, donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0)=10$. **(0,25 pt)**

Supposons que $0<x<1$

On a $\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{\frac{x+\ln(1-x)}{1-x}}{x}=\frac{x+\ln(1-x)}{x(1-x)}=\frac{x}{x(1-x)}+\frac{\ln(1-x)}{x(1-x)}$

$\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1-x}\times\frac{\ln(1-x)}{-x}$

D'une part, $\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-x}=1$.

D'autre part, posons $t=-x$.

$$x\to0^+\iff t\longrightarrow0^-.$$

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{-x} = \lim_{t\to 0^-} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1.$$

D'où $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = 1 - 1 \times 1 = 1 - 1 = 0.$

Ainsi, f est dérivable à droite en 0 et f'_d (0) = 0. **(0,25 pt)**

Comme $f'_g(0) \neq f'_d(0)$, donc f n'est pas dérivable en 0.

Interprétons géométriquement les résultats obtenus.

(C_f) admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente à gauche de coefficient directeur 10 et une demi-tangente horizontale à droite. **(0,5 pt)**

6) Calculer $f'(x)$ puis étudions son signe sur $]-\infty, 0[$.

On a $\forall\, x \in\,]-\infty, 0[, f(x) = (6x-2)\, e^{-2x} + 2$

$f'(x) = 6\, e^{-2x} - 2\,(6\,x - 2)\, e^{-2x} = [6 - 2(6x-2)]\, e^{-2x} = (-12x + 10)\, e^{-2x}$

$f'(x) = 2\,(-6x + 5)\, e^{-2x}$.

$\forall\, x \in\,]-\infty, 0[, -6x + 5 > 0$ et $e^{-2x} > 0,$ donc $f'(x) > 0$. **(0,25 pt)**

Calculer $f'(x)$ puis étudions son signe sur $]0, +\infty[\setminus\{1\}$.

On a $\forall\, x \in\,]0, +\infty[\, \setminus \{1\}, f(x) = \frac{x+\ln|1-x|}{1-x}$.

$f'(x) = \frac{\left(1-\frac{1}{1-x}\right)(1-x)-(-1)\,(x+\ln|1-x|)}{(1-x)^2}$.

$f'(x) = \frac{1-x-1+x+\ln|1-x|}{(1-x)^2} = \frac{\ln|1-x|}{(1-x)^2}$

$\forall\, x \in\,]0, +\infty[\, \setminus \{1\}, (1-x)^2 > 0$, donc $f'(x)$ est du signe de $\ln|1-x|$.

$\ln|1-x| > 0 \iff |1-x| > 1 \iff 1 - x < -1$ ou $1 - x > 1$.

$\iff -x < -2$ ou $-x > 0 \iff x > 2$ ou $x < 0$.

$x < 0$ est impossible car $x \in\,]0, +\infty[\, \setminus \{1\}$.

$f'(x) > 0 \iff x > 2 \iff x \in\,]2, +\infty[$

$f'(x) < 0 \iff x \in\,]0, 1[\, \cup\,]1, 2[$.

$f'(x) = 0 \iff x = 2$. **(0,5 pt)**

7) Dressons le tableau de variations de f

x	$-\infty$		0		1		2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	↗	0 ‖	↘ $-\infty$	‖ $+\infty$	↘	-2	↗	-1

$f(2) = \frac{2+\ln|1-2|}{1-2}$

$f(2) = -2.$

(0,5 pt)

8) Montrons sur l'intervalle $]1\,, 2[$ que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que $1,2 < \alpha < 1,3$.

On a f est continue et strictement décroissante sur $]1, 2[$, donc Montrer sur l'intervalle $]1\,, 2[$ que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α et que

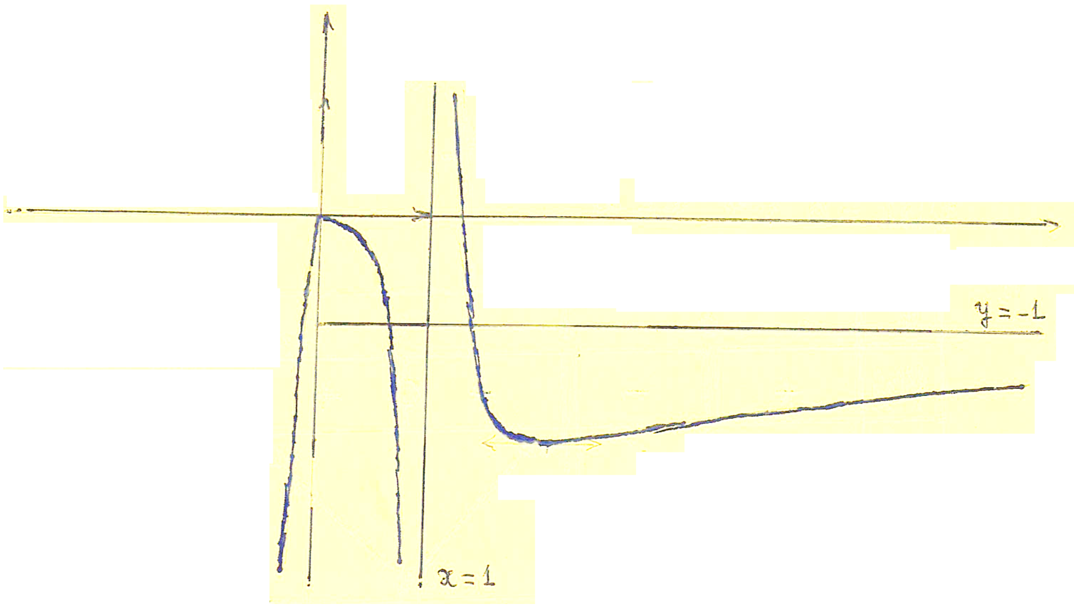
$1,2 < \alpha < 1,3$. est une bijection de $]1, 2[$ sur $f(]1, 2[) =]-2, +\infty[$. Or $0 \in]-2, +\infty[$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1, 2[$.

$1,2 \in\,]1, 2[$ et $1,3 \in\,]1, 2[$. De plus $f(1,2) \simeq 2$ et $f(1,3) \simeq -0,3$

D'où $f(1,2) \times f(1,3) < 0 \Longrightarrow 1,2 < \alpha < 1,3$. **(0,5 pt)**

9) Construisons (C_f) et ses asymptotes.

$f(3) \simeq -1,85$; $f(4) \simeq -1,7$; $f(1,5) \simeq -1,5$ et $f(0,5) \simeq -0,39$.



(0,75 pt)

10) Calculons en cm^2 l'aire $A(E)$ de la partie E du plan comprise entre les droites d'équations $x = 2, x = 3$, $y = -1$ et la courbe (C_f) de f.

On a $A(E) = \int_2^3 [-1 - f(x)]\, dx \times u.a$, ($u.a$=unité d'aire).

$\forall\, x \in [2, 3]$, on a :

$$-1 - f(x) = -1 - \frac{x + \ln|1-x|}{1-x} = \frac{-1 + x - x - \ln(x-1)}{1-x}$$

$$-1 - f(x) = \frac{-1 - \ln(x-1)}{1-x} = \frac{1 + \ln(x-1)}{x-1} = \frac{1}{x-1} + \frac{\ln(x-1)}{x-1}$$

$$= [\ln(x-1)]' + \frac{1}{x-1}\ln(x-1) = [\ln[x-1]]' + [\ln(x-1)]'\ln(x-1).$$

D'où $-1 - f(x) = [\ln(x-1)]' + \left[\frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]' = \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]'$.

Ce qui implique que $A\,(E) = \left[\ln(x-1) + \frac{1}{2}\ln^2(x-1)\right]_2^3 \times u.a = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times u.a$.

On sait que $1\, u.a = 2\, cm \times 2\, cm = 4\, cm^2$; $A\,(E) = \left(\ln 2 + \frac{1}{2}\ln^2 2\right) \times 4\, cm^2$

$A\,(E) = (4\ln 2 + 2\ln^2 2)\, cm^2$ $\;d'où\;$ $A\,(E) \simeq 3{,}73\, cm^2$ **(0,5 pt)**