UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□♦□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

2023T05N01A29
Durée: 04 heures
Série : STIDD– Coef. 5
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1 (05 points)

Pour chacune des questions de ce questionnaire à choix multiples, quatre réponses A, B, C et D sont proposées dont une seule est correcte. Sur ta copie, indique le numéro de la question, la réponse correcte et une justification de la réponse.

Une réponse correcte est notée 0,5 point et la justification 0,5 point. Une réponse fausse ou une absence de réponse sont notées 0 point.

N°	Questions	Réponses			
		A	B	C	D
1	Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par $f(x) = \ln(x^2)$. Quel est l'ensemble de définition de f ?				$\mathbb{R} \setminus \{0\}$
2	Quelle est la limite quand x tend vers 1 de $\frac{e^{x-1}-1}{x^2-1}$?		$\frac{1}{2}$		
3	Quelle est l'écriture sous forme exponentielle du nombre complexe $z = -\sqrt{3} - i\sqrt{3}$?		$\sqrt{6}\, e^{i\frac{5\pi}{4}}$		
4	Soit f définie par $f(x) = x^3\,(\ln x)^2$ Quelle est l'expression de sa dérivée ?				$x^2\ln x(3\ln x + 2)$
5	Quelle est l'expression de la solution de l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$ vérifiant $y(0) = 1$ et $y'(0) = 0$?			$\cos 2x$	

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace muni du repère orthonormal direct $(O\,;\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points $A(1, 2, -3)$, $B\,(-5, -2, -4)$, $C(3, -6, 2)$, $D\,(3, -2, 0)$ et $E\,(-2, 4, 5)$.

1. Démontrons que les points A, B, C et D sont coplanaires. **(1 pt)**

$\overrightarrow{AB}(-6\,, -4, -1)$, $\overrightarrow{AC}(2\,, -8, 5)$ et $\overrightarrow{AD}(2\,, -4, 3)$.

On a $\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AD} = 0$, les points A, B, C et D sont coplanaires.

2. Déterminer une équation cartésienne du plan (P) passant par les points A, B et C. **(1 pt)**

$$(P) :\ x - y - 2z - 5 = 0$$

3. Montrer que le point E n'appartient pas au plan (P). **(0,5 pt)**

On a : $-2 - 4 - 10 - 5 \neq 0$. Donc E n'appartient pas au plan (P).

4. Dans sa politique de gestion de l'environnement, la mairesse d'une commune décide pour le stockage des déchets plastiques de construire un entrepôt ayant la forme du solide $EABC$, l'unité étant de 10 m. Dans cette commune la quantité de déchets plastiques produits par jour est estimée à 4500 kg au début de la première année et reste constante tout au long de l'année. Cette quantité augmente au début de chaque année de 50 kg de déchets et reste constante tout au long de l'année. Madame la mairesse souhaiterait que cet entrepôt reçoive les déchets plastiques produites dans sa commune pour une durée de 5 années. On suppose que 100 kg de déchets plastiques occupent un volume de 1 m^3.

Dire avec justification à l'appui si cet entrepôt satisfait au souhait de madame la mairesse.

Donnée : 1 an = 365 jours.

Soit V le volume en m^3 de l'entrepôt.

$$V = \left|\frac{1}{6}\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AE}\right| \times 1000 \text{ m}^3$$

$$\boldsymbol{V = 98000 \ \text{m}^3}$$

(0,5 pt)

Soit q_n la quantité en kg de déchets produits lors de la nième année.

$$q_n = [4500 + (n-1) \times 100] \times 365$$

La suite (q_n) est une suite arithmétique de premier terme $q_1 = 4500 \times 365$ et de raison $r = 100 \times 365$

La quantité de déchets en kg produits sur une durée de 5 années est :

$$Q = q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q_5$$

$$= \frac{5}{2} \times (2q_1 + (5-1) \times r)$$

$$\boldsymbol{Q = 8577500 \text{ kg}}$$

Le volume occupé Q est : $V' = \frac{8577500}{100}$

$$\boldsymbol{V' = 85775 \text{ m}^3}$$

(0,5 pt)

On a : $V' < V$. Donc cet entrepôt satisfait au souhait de madame la mairesse.

(0,5 pt)

Problème (11 points)

Partie A (3,5 pts)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = -e^x - x + 2$.

1. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition de g. **(1 pt)**

$Dg = \mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$

$\lim\limits_{-\infty} g = +\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} g = -\infty$

2. a) Calculer l'expression de la dérivée g' de g puis étudier son signe. **(0,75 pt)**

$$g'(x) = -e^x - 1$$

$\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) < 0$

b) Etablir alors le tableau de variation de g. **(0,5 pt)**

La fonction g est strictement décroissante

3. a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. On la notera α. **(0,5 pt)**

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Elle réalise donc une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.

On en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution. On la notera α.

b) Montrer que α est compris entre 0,4 et 0,5. **(0,25 pt)**

$g(0{,}4) > 0$ et $g(0{,}5) < 0$ donc $0{,}4 < \alpha < 0{,}5$

4. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5 pt)**

- Sur $]-\infty, \alpha[$, $g(x) < 0$
- Sur $]\alpha, +\infty[$, $g(x) > 0$

Partie B (5,5 pts)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-1}{e^x} - x + 3$ et (C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormal (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$), (unité graphique 2 cm).

1. Calculer la limite de f en $-\infty$ et la limite de f en $+\infty$. **(1 pt)**

$\lim\limits_{-\infty} f = -\infty$ et $\lim\limits_{+\infty} f = -\infty$

2. a) Montrer que pour tout réel x, $f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.

Vérification **(1 pt)**

b) Dresser le tableau de variations de f.

$f'(x)$ est du signe de $g(x)$ **(0,5 pt)**

- Sur $]-\infty, \alpha[$, f est strictement décroissante
- Sur $]\alpha, +\infty[$, f est strictement croissante

Tableau

3. a) Montrer que la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$.

$$\lim_{+\infty}[f(x) - (-x + 3)] = \lim_{+\infty}\left[\frac{x-1}{e^x}\right] = 0$$

Donc la droite (D) d'équation $y = -x + 3$ est asymptote à (C) en $+\infty$. **(0,5 pt)**

b) Etudier la position relative de (C) et (D).

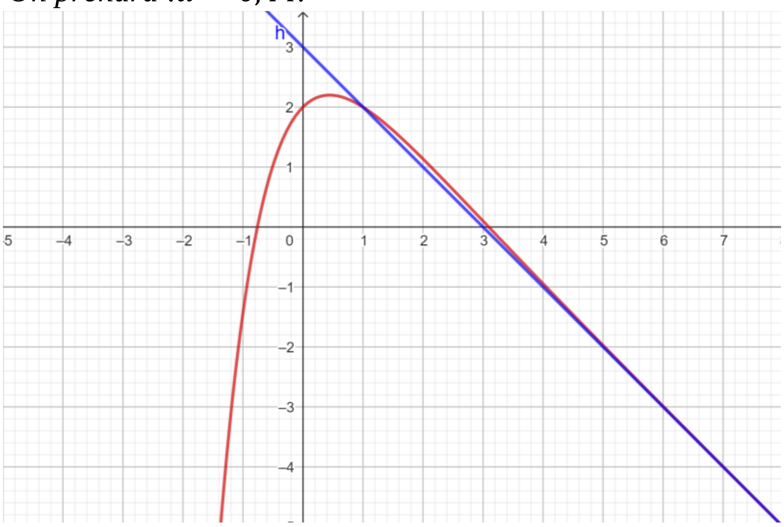
$$f(x) - (-x + 3) = \frac{x-1}{e^x}$$

- Sur $]-\infty, 1[$, (C) est en dessous de (D).
- Sur $]1, +\infty[$, (C) est au-dessus de (D). **(0,5 pt)**

c) Etudier la branche infinie de (C) en $-\infty$.

$\lim\limits_{-\infty}\left[\frac{f(x)}{x}\right] = +\infty$. (C) admet en $-\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées. **(0,5 pt)**

d) Tracer (C) et (D). *On prendra* : $\alpha \approx 0{,}44$. **(1,5 pt)**



Partie C (2 pts)

Un menuisier métallique reçoit une commande d'abris de scooters ayant deux faces. Chaque face latérale est représentée par le domaine délimité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 2{,}5$. L'unité est le mètre. Il veut connaître l'aire d'une face latérale pour avoir une idée sur le nombre de plaques de forme rectangulaire nécessaires dont une dimension est 2,5 m. Il voudrait ainsi réduire les déchets sur la fabrication d'une face latérale.

Déterminer une valeur approchée à 0,01 m^2 près de l'aire d'une face latérale d'un abri et une valeur approchée minimale à 0,01 m près de l'autre dimension d'une plaque pour réduire les déchets.

- L'aire d'une face latérale en m^2 est :

$$\mathcal{A} = \int_0^{2,5} f(x)dx = \int_0^{2,5} \left(\frac{x-1}{e^x} - x + 3\right) dx = \int_0^{2,5} xe^{-x}dx - \int_0^{2,5} e^{-x}dx - \int_0^{2,5} (-x+3)e^{-x}dx$$

- Une valeur approchée minimale à 0,01 m près de l'autre dimension d'une plaque est $f(\alpha) = f(0{,}44)$
  La valeur approchée minimale à 0,01 m près de l'autre dimension est 2,20 m.