UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2023TSTEG37NA012
Durée : 4 heures
Série : STEG – Coef. 4
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

EXERCICE 1 (05 points)

Un entrepreneur doit effectuer des travaux de carrelage et de peinture sur un chantier.
Les travaux de carrelage nécessitent par jour et par carreleur 150 000 F de matériel et 50 000 F de main d'œuvre.
Les travaux de peinture nécessitent par jour et par peintre 100 000 F de matériel et 100 000 F de main d'œuvre.
Chaque ouvrier doit disposer d'une brouette et l'entreprise en possède 7.
L'entrepreneur dispose par jour d'un budget de 1 000 000 F pour le matériel et de 600 000 F pour la main d'œuvre.
On note x le nombre de carreleurs embauchés par jour et y le nombre de peintres embauchés par jour.

1) Montrer que les contraintes de cet entrepreneur se traduisent par le système d'inéquations (E) suivant :

$$(E) : \begin{cases} x \geq 0\,;\, y \geq 0 \\ x + y \leq 7 \\ x + 2y \leq 12 \\ 3x + 2y \leq 20 \end{cases}$$ **(01 point)**

2) L'entrepreneur réalise par jour un bénéfice de 30 000 F sur le travail de chaque carreleur et 40 000 F sur celui de chaque peintre.
On note B le bénéfice total que l'entrepreneur réalise par jour.

a) Exprimer B en fonction x et y. **(01,5 point)**

b) Déterminer graphiquement le nombre de carreleurs et le nombre de peintres que l'entrepreneur doit faire travailler chaque jour pour assurer un bénéfice maximal. **(01,5 point)**

c) Calculer ce bénéfice maximal. **(01 point)**

EXERCICE 2 (05 points)

Le service d'un emprunt remboursable en annuités constantes, la première échéance un an après l'obtention du prêt, fait apparaître les renseignements suivants :

- La différence des deux premiers amortissements est : 41 888,733 F.
- La différence du cinquième et du quatrième amortissement est : 48 491,43 F.
- Le dernier amortissement est : 1 178 832,856 F.

Calculer :

1) Le taux de l'emprunt et le premier amortissement. **(01,5 point)**
2) Le montant de l'annuité constante. **(01 point)**
3) Le nombre d'annuités. **(01 point)**
4) Le montant de la dette. **01 point)**
5) Le capital remboursé après versement de la cinquième annuité. **(0,5 point)**

PROBLEME (10 points)

PARTIE A (03,5 points)

Soit g la fonction définie sur $]0\,,+\infty[$ par : $g(x) = -\ln x + \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2}$.

1) Calculer la limite de g en 0 et en $+\infty$. **(0,25 + 0,25 point)**

2) Etudier les variations de g. **(01 point)**

3) Dresser le tableau de variations de g. **(0,75 point)**

4) a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique. On la notera α. **(0,5 point)**

b) Montrer que α est compris entre $3{,}6$ et $3{,}7$. **(0,25 point)**

5) En déduire le signe de g. **(0,5 point)**

PARTIE B (06,5 points)

Soit la fonction f définie par : $f(x) = e^{-x}\left(\ln x - \frac{3}{x}\right) + 1$ et (Cf) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthogonal $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ avec $\|\vec{\imath}\| = 1\text{ cm}$ et $\|\vec{\jmath}\| = 5\text{ cm}$.

1) Déterminer le domaine de définition D_f de f. **(0,25 point)**

2) Calculer la limite de f en 0, puis interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 + 0,25 point)**

3) a) Montrer que pour $x > 0$, $f(x) = \left(\frac{\ln x}{x}\right)\left(\frac{x}{e^x}\right) - \frac{3}{xe^x} + 1$. **(0,5 point)**

b) Calculer la limite de f en $+\infty$ puis, interpréter graphiquement le résultat. **(0,5 + 0,25 point)**

4) a) Montrer que pour tout réel x strictement positif, $f'(x) = e^{-x}g(x)$. **(01,5 point)**

b) Déterminer alors le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5 point)**

c) Dresser le tableau de variation de f. **(0,75 point)**

5) Montrer que : $f(\alpha) = e^{-\alpha}\left(\frac{\alpha+3}{\alpha^2}\right) + 1$. **(0,5 point)**

6) Tracer soigneusement la courbe (Cf) (*On prendra* $\alpha \approx 3{,}7$). **(01 point)**