UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

20243T05AN01A29NO 1
Durée: 04 heures
Série : F6– Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1 (05 points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^4 = 1$.
(*On donnera les solutions sous forme algébrique*).

$z^4 = 1 \Leftrightarrow z^2 = 1$ ou $z^2 = -1$

$\Leftrightarrow z = \pm 1$ ou $z^2 = \pm i$

Donc : $S = \{1\,;\, -1\,;\, i\,;\, -i\}$ **(01 pt)**

2. On considère l'équation (E): $z^4 = 28 + 96i$.

a) Montre que le nombre complexe $a = 3 + i$ est une solution de (E).

On a : $a^4 = (3+i)^4 = 28 + 96i$, donc a est une solution de (E). **(0.5 pt)**

b) Déduis-en les autres solutions de (E).

On obtient les autres solutions de (E) en multipliant le nombre complexe a par les solutions de l'équation $z^4 = 1$.
Ainsi donc, les solutions de (E) sont :

$z_0 = 3 + i$, $z_1 = -3 - i$, $z_2 = -1 + 3i$ et $z_3 = 1 - 3i$. **(01 pt)**

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = 1 - 3i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = -1 + 3i$ et $z_D = -3 - i$.

a) Calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$.

$z_{\overrightarrow{AB}} = 2 + 4i$ et $z_{\overrightarrow{DC}} = 2 + 4i$. **(0,25pt + 0,25pt)**

b) On pose : $U = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.

Ecrire U sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.

On a : $U = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$, donc $U = i$ et $U = cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + isin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ **(0,5pt + 0,5pt)**

c) Déduis-en que le quadrilatère $ABCD$ est un carré.

On a : $\frac{z_A - z_B}{z_C - z_B} = i$, donc $AB = AC$ et $\left(\overrightarrow{BC}; \overrightarrow{BA}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$.
ABC est alors un triangle rectangle et isocèle en B.
De plus, ABCD est un parallélogramme car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$
Donc : le quadrilatère ABCD est un carré **(0,5 pt)**

4. a) Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre O qui transforme A en B.

$r\,:\, z' = iz$. **(0,5 pt)**

b) Déterminer l'image du point B par r en déduire l'image de la droite (AB) par r.

L'image de B par r est C **(0,25 pt)**
L'image de A par r est B
L'image de la droite (AB) par r est la droite (BC). **(0,25 pt)**

Exercice 2 (05 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$, on considère les points $A(1\,,0\,,2)$, $B(1\,,1\,,4)$, $C(-1\,,1\,,1)$, et $D(0\,,1\,,3)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

On a : $\overrightarrow{AB}(0\,,1\,,2)$, $\overrightarrow{AC}(-2\,,1\,,-1)$

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ étant non colinéaires, les points A, B et C déterminent un plan. **(0,5 point)**

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3\,,4\,,\ -2)$.

a) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) .

On a : $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC}=0$. Donc, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

Par conséquent, le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) . **(1 point)**

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) .

$(ABC) : 3x+4y-2z+d=0$.

On a : $A\in(ABC)$, donc $3(1)+4(0)-2(2)+d=0$. On en déduit que $d=1$.

$(ABC) : 3x+4y-2z+1=0$.

3. Soit (P_1) le plan d'équation $x+y+2z+3=0$ et (P_2) le plan d'équation $x-2y-z=0$.

a) Montrer que les plans (P_1) *et* (P_2) sont sécants suivants une droite (D) dont on déterminera une représentation paramétrique.

- Le vecteur $\vec{n}'(1\,;\ 1\,;\ 2\ )$ est un vecteur normal de P_1 et le vecteur $\vec{n}''(1\,;\ -2\,;\ -1\ )$ est un vecteur normal de P_2.

Etant donné que ces deux vecteurs normaux ne sont pas colinéaires, les plans P_1 et P_2 ne sont pas parelles dont sécants.

- Déterminons une représentation paramétrique de (D)

$$\begin{cases} x+y+2z+3=0 \\ x-2y-z=0. \\ z=k \end{cases} \qquad \begin{cases} x=-k-2 \\ y=-k-1 \\ z=k \end{cases} \quad (k\in IR)$$ **(0,5 pt)**

b) Montrer que la droite (D) est sécante au plan (ABC) en un point I dont on donnera ses coordonnées.

$$3(-k-2)+4(-k-1)-2k+1=0$$
$$k=-1$$

En remplaçant on obtient $\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \\ z=-1 \end{cases}$ donc $I(-1\,;0\,;\ -1\,)$ **(1 point)**

4. a) Montrer que les quatre points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre.

$(ABC) : 3x+4y-2z+1=0$

Le point $D(0\,,1\,,3)$ n'appartient pas au plan (ABC) car : $3\times0+4\times1-2\times2+1=1$

b) Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. **(0,5 point)**

$$V=\frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)\right|\,uv$$

Or, $\overrightarrow{AD}(-1\,;\ 1\,;\ 1)$ et $\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)=-1(-3)+1(-4)+2\times2=-3$

Donc, $V=\frac{1}{2}\times uv$

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x\ln x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (03 points)

On considère la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$.

1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ puis montrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = (-\ln x)(2+\ln x)$.

La fonction g est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ car étant le produit et la somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$ et on a $g'(x) = (-ln x)(2 + ln x)$. **(0,5 pt)**

2. Dresser le tableau de variations complet de g.

- $D_g =]0\,;\,+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x) = 1 \;\; car \begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+}(1) = 1 \\ \lim\limits_{x\to 0^+}(-xln^2x) = 0 \end{cases}$ **(0,25 pt)**
- $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x) = -\infty \;\; car \;\; \lim\limits_{x\to +\infty}(-xln^2x) = -\infty$ **(0,25 pt)**

Tableau de variation de la fonction g :

x	0		e^{-2}		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	1	↘	$g(e^{-2})$	↗	1	↘	$-\infty$

(0,75 pt)

3. a) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution qu'on notera α.

Sur $]0\,;1]$ g admet un minimum strictement positif donc $g(x) \neq 0$.

Sur $]1\,;\,+\infty[$ g étant continue et strictement décroissante sur $]1\,;\,+\infty[$ et $g(]1\,;\,+\infty[) =]-\infty\,;\,1[$.

De plus $0 \in]-\infty\,;\,1[$. donc $\exists\, \alpha \in]1\,;\,+\infty[$ tel que $g(\alpha) = 0$.

D'où : l'équation $g(x) = 0$ admet une unique $\alpha \in]0\,;\,+\infty[$ **(0,5 pt)**

b) Montrer que $2 < \alpha < 2{,}1$.

$g(2) = 1 - 2ln^2(2) \approx 0{,}04$ et $g(2{,}5) = 1 - 2{,}5ln^2(2{,}5) \approx -1{,}1$

$On\ a$: $g(2) > 0$ et $g(2{,}5) < 0$, donc : $2 < \alpha < 2{,}5$. **(0,25 pt)**

c) Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

- Si $x \in]\,0\,;\alpha\,[$, on a : $g(x) > 0$
- $g(x) = 0 \iff x = \alpha$
- Si $x \in]\,\alpha\,;\,+\infty\,[$, on a : $g(x) < 0$

(0,5 pt)

Partie B (04,25 points)

1. a) Déterminer la limite de f en 0^+ puis interpréter géométriquement le résultat.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$ car $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0^+} (lnx) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0^+} ((1 + xLnx) = 1 \end{cases}$ **(0,25 pt)**

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C). **(0,25 pt)**

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \frac{lnx}{x}\left[\frac{1}{\frac{1}{lnx}+x}\right] = 0$ car $\lim\limits_{x\to +\infty}\left[\frac{1}{\frac{1}{lnx}+x}\right] = 0$ **(0,25 pt)**

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à (C). **(0,25 pt)**

2. a) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+\ln\ )^2}$.

On a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(1+xlnx) - (lnx+1)lnx}{(1+xlnx)^2} = \frac{g(x)}{x(1+xln\ )^2}$ **(0,5 pt)**

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation.

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	0

(0,75 pt)

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$.

On sait que $g(\alpha) = 0$, donc $1 - \alpha ln^2\alpha = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = ln\alpha$

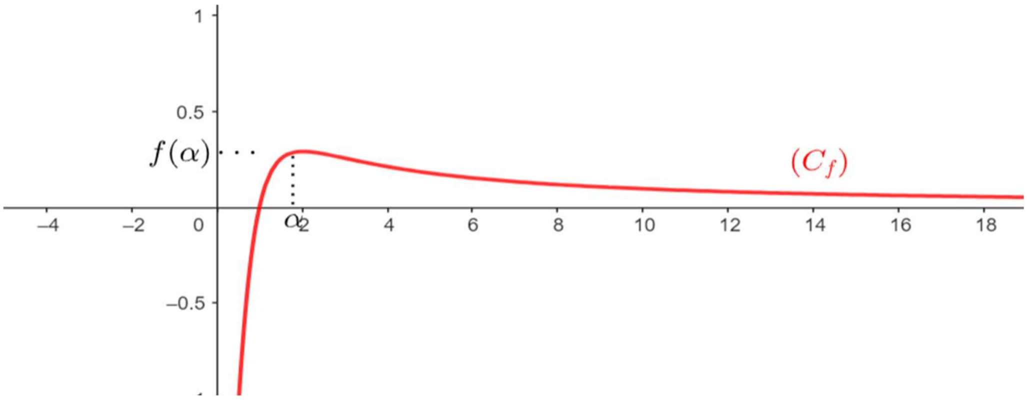
Or $f(\alpha) = \frac{ln\alpha}{1+\alpha ln\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\alpha}}}{1+\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha}}}$ donc on a $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ **(0,5 pt)**

3. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$.

On a $(T): y = f'(1)(x-1) + f(1)$

D'où : $(T) : y = x$ **(0,5 pt)**

4. Construire (T) et (C) en prenant $f(\alpha) \approx 0{,}29$



(1 pt)

Partie C (02,75 points)

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [\alpha\,, +\infty[$.

1. Montrer que la fonction h est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera.

La fonction h est continue et strictement décroissante donc h réalise une bijection de $I = [\alpha\,; +\infty[$ vers $J = \left]0\,;\ \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}\right]$. **(0,5 pt)**

2. **a)** Calculer $h(4)$ puis, dire si la fonction réciproque h^{-1} de h est dérivable en $y_0 = \frac{2\ln 2}{1+8\ln 2}$.

$$h(4) = \frac{ln4}{1+4ln4} = \frac{2\ln 2}{1+8\ln 2}$$

$$h'(4) = \frac{g(4)}{4(1+4ln4)^2} = \frac{1-4(ln4)^2}{4(1+4ln4)^2} \neq 0$$

Donc h^{-1} est dérivable en $y_0 = \frac{2\ln 2}{1+8\ln}$. **(0,75 pt)**

b) Dans le cas échéant, calculer $(h^{-1})'(y_0)$.

$$(h^{-1})'^{(y_0)} = \frac{1}{h'(4)} = \frac{4(1+4ln4)^2}{1-4(ln4)^2}.$$

(0,5 pt)

3. La fonction réciproque h^{-1} de h est-elle dérivable en $y_1 = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$? Justifier votre réponse.

On a : $h(\alpha) = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$ et $h'(\alpha) = 0$. Donc h^{-1} n'est pas dérivable en $y_1 = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$. **(0,5 pt)**

4. Tracer (C'), courbe de h^{-1}dans le plan muni du repère $(O\,; \vec{i}, \vec{j})$.

Symétrie par rapport à la droite d'équation $y = x$. **(0,5 pt)**