OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

Durée: 04 heures
Série : F6– Coef. 5

Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Exercice 1 (05 points)

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation $z^4 = 1$.
(*On donnera les solutions sous forme algébrique*). **(01 point)**

2. On considère l'équation (E): $z^4 = 28 + 96i$.
- **a)** Montre que le nombre complexe $a = 3 + i$ est une solution de (E). **(0,5 point)**
- **b)** Déduis-en les autres solutions de (E). **(0,5 point)**

3. Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité graphique 1 cm.
On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :
$z_A = 1 - 3i$, $z_B = 3 + i$, $z_C = -1 + 3i$ et $z_D = -3 - i$.
- **a)** Calcule les affixes des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ *et* $\overrightarrow{DC}$. **(0,5 point)**
- **b)** On pose : $U = \frac{z_A - z_B}{z_C - z_B}$.
  Ecrire U sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. **(01 point)**
- **c)** Déduis-en que le quadrilatère $ABCD$ est un carré. **(0,5 point)**

4. **a)** Donner l'écriture complexe de la rotation r de centre O qui transforme A en B. **(0,5 point)**
- **b)** Déterminer l'image du point B par r en déduire l'image de la droite (AB) par r. **(0,5 point)**

Exercice 2 (05 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points suivants :

$A(1, 0, 2)$, $B(1, 1, 4)$, $C(-1, 1, 1)$, et $D(0, 1, 3)$.

1. Montrer que les points A, B et C déterminent un plan. **(0,5 point)**

2. Soit $\vec{n}$ le vecteur de coordonnées $(3, 4, -2)$.
- **a)** Montrer que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal au plan (ABC) . **(01 point)**
- **b)** En déduire une équation cartésienne du plan (ABC) . **(0,5 point)**

3. Soit (P_1) le plan d'équation $x + y + 2z + 3 = 0$ et (P_2) le plan d'équation $x - 2y - z = 0$.
- **a)** Montrer que les plans (P_1) *et* (P_2) sont sécants suivant une droite (D) dont on déterminera une représentation paramétrique. **(01 point)**
- **b)** Montrer que la droite (D) est sécante au plan (ABC) en un point I dont on donnera ses coordonnées. **(01 point)**

4. **a)** Montrer que les quatre points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre. **(0,5 point)**
- **b)** Calculer le volume du tétraèdre $ABCD$. **(0,5 point)**

Série : F6

Epreuve du 1^er groupe

Problème (10 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,,+\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x\ln x}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A (03 points)

On considère la fonction g définie sur $]0\,,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x(\ln x)^2$.

1. Justifier que la fonction g est dérivable sur $]0\,,+\infty[$ puis montrer que pour tout réel x strictement positif, $g'(x) = (-\ln x)(2+\ln x)$. **(0,5 point)**

2. Dresser le tableau de variations complet de g. **(01,25 point)**

3. **a)** Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution qu'on notera α. **(0,5 point)**

b) Montrer que $2 < \alpha < 2{,}1$. **(0,25 point)**

c) Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **(0,5 point)**

Partie B (04,25 points)

1. **a)** Déterminer la limite de f en 0^+ puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,5 point)**

b) Déterminer la limite de f en $+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat. **(0,5 point)**

2. **a)** Montrer que pour tout $x \in\,]0\,,+\infty[$ on a : $f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+\ln x)^2}$. **(0,5 point)**

b) Etudier le sens de variation de f puis dresser son tableau de variation. **(0,75 point)**

c) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$. **(0,5 point)**

3. Déterminer une équation de la tangente à (C) au point d'abscisse $x = 1$. **(0,5 point)**

4. Construire (T) et (C) en prenant $f(\alpha) \approx 0{,}29$. **(01 point)**

Partie C (02,75 points)

Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I = [\alpha\,,+\infty[$.

1. Montrer que la fonction h est une bijection de I vers un intervalle J que l'on précisera. **(0,5 point)**

2. **a)** Calculer $h(4)$ puis, dire si la fonction réciproque h^{-1} de h est dérivable en $y_0 = \frac{2\ln 2}{1+8\ln 2}$. **(0,75 point)**

b) Dans le cas échéant, calculer $(h^{-1})'(y_0)$. **(0,5 point)**

3. La fonction réciproque h^{-1} de h est-elle dérivable en $y_1 = \frac{1}{\alpha+\sqrt{\alpha}}$? Justifier votre réponse. **(0,5 point)**

4. Tracer (C'), courbe de h^{-1} dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$. **(0,5 point)**