MATHEMATIQUES

Exercice 1 (5 points)

1. On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$(E) : \quad z^4 + (-5+3i)z^3 + (8-9i)z^2 + (-14+6i)z + 10 = 0 \cdot$$

a) Vérifier que 1 solution de (E). **0,5 pt**

b) Montrer que (E) admet une solution imaginaire pure que l'on déterminera. **1 pt**

c) Achever la résolution de (E). **1 pt**

2. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\ ;\ \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A , B , C et D d'affixes respectives 1 , i , $1-3i$ et $3-i$.

a) Placer ces points dans le plan. **0,5 pt**

b) Déterminer le réel $k = \frac{AB}{CD}$ et la mesure principale θ de l'angle $\left(\overrightarrow{CD}\ ;\ \overrightarrow{AB}\right)$. **1 pt**

3. Soit Ω le point d'affixe $\omega = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \cdot$

Montrer que les triangles ΩAC et ΩBD sont rectangles en Ω. **1 pt**

Exercice 2 (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les quatre points suivants : $A(1,0,1)$, $B(0,-1,2)$, $C(1,-3,3)$ et $D(3,5,1)$.

1. Montrer que les quatre points A, B, C et D sont les sommets d'un tétraèdre. **1,5 pt**

2. Un maçon a reçu une commande de quatre bornes identiques, en béton armé, homogènes. Chacune de ces bornes est représentée par le tétraèdre $ABCD$.

L'unité de mesure des longueurs est le mètre et la masse volumique du béton armé est de 2500 kg/m^3, c'est-à-dire que chaque mètre cube de béton armé a une masse de 2500 kilogrammes.

Pour la livraison, il dispose d'une camionnette qui ne peut transporter plus de 25 tonnes de matériel.

Voyant que le conducteur de la camionnette doute de la possibilité de transporter les quatre bornes pendant un seul voyage, le jeune Modou, élève dans un lycée technique, et apprenti maçon pendant les vacances, dit au conducteur, avec assurance, que le transport des quatre bornes peut se faire en un seul voyage.

A l'aide des outils mathématiques au programme de terminale, confirme ou infirme les propos de Modou. **2,5 pts**

Problème (11 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\,,+\infty[$ par $f(x)=\frac{e^x-1}{xe^x+1}$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

Partie A

Soit g la fonction définie sur $[0\,,+\infty[$ par $g(x)=x+2-e^x$.

1. Dresser le tableau de variations de g sur $[0\,,+\infty[$. **1 pt**

2. **a)** Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une unique solution notée α sur $[0\,,+\infty[$.

b) Montrer qu'on a $1{,}14<\alpha<1{,}15$. **1 pt**

3. Déterminer alors le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,5 pt**

Partie B

1. **a)** Montrer que $\forall x\in[0\,,+\infty[$, $f(x)=\frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$. **0,5 pt**

b) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat. **1 pt**

2. **a)** Justifier que f est dérivable sur l'intervalle $[0\,,+\infty[$ et que pour tout $\in[0\,,+\infty[$, on a :

$f'(x)=\frac{g(x)e^x}{(xe^x+1)^2}$. **1 pt**

b) Etablir alors le tableau de variation de f sur $[0\,,+\infty[$. **1 pt**

3. Montrer que $f(\alpha)=\frac{1}{\alpha+1}$. **0,5 pt**

4. **a)** Ecrire l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse $x_0=0$. **0,5 pt**

b) Montrer que $\forall x\in[0\,,+\infty[$, $f(x)-x=\frac{(x+1)(e^x-xe^x-1)}{xe^x+1}$. **0,5 pt**

c) En admettant que pour tout $x\in[0\,,+\infty[$, $e^x-xe^x-1\leq 0$, étudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la tangente (T). **0,5 pt**

5. Construire (T) et (C). **1 pt**

Partie C

1. En utilisant la question **1. a)** de la **partie B**, donner une primitive de f sur $[0\,,+\infty[$. **0,5 pt**

2. Pour tout réel λ strictement supérieur à 0, on note $\mathcal{A}(\lambda)$ l'aire en cm^2 du domaine plan délimité par la courbe (C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x=\lambda$.

a) Calculer $\mathcal{A}(\lambda)$. **0,75 pt**

b) Calculer la limite de $\mathcal{A}(\lambda)$ quand λ tend vers $+\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat. **0,75 pt**