OFFICE DU BACCALAUREAT

E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

Durée : 2 heures
Séries : S1-S1A-S3 – Coef. 8

Epreuve du 2ème groupe

MATHEMATIQUES

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées. Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites. Leur utilisation sera considérée comme une fraude (Cf. Circulaire n° 5990/OB/DIR. du 12 08 1998).

EXERCICE 1 (06 points)

L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath},\vec{k})$ d'unité 1cm.
On considère les points $A(2,0,0)$, $B(2,2,0)$, $C(0,2,0)$ et $D(2,2,2)$.

1. **a.** Démontrer que les points A, B et C définissent un plan. **(01 point)**
   b. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{BD}$ est normal au plan (ABC). **(01 point)**
   c. Donner une équation cartésienne du plan (ABC). **(01 point)**
   d. Calculer l'aire $\mathcal{A}$ du triangle ABC. **(01 point)**
2. Soient I, J et K les points tels que : $\overrightarrow{AI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AJ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$.
   Soit $\mathcal{V}$ le volume du tétraèdre $ABCD$ et $\mathcal{V}$' le volume du tétraèdre $AIJK$.
   a. Calculer $\mathcal{V}$. **(01 point)**
   b. En déduire $\mathcal{V}$'. **(01 point)**

EXERCICE 2 : (06 points)

Soit (U_n) la suite définie par : $u_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $U_{n+1}=\frac{1}{3}U_n+n-1$.

1. a. Démontrer que $\forall n \geq 3$, $U_n \geq 0$. **(01,5 point)**
   b. Démontrer que $\forall n \geq 4$, $U_n \geq n-2$. **(01,5 point**
   c. En déduire la limite de la suite (U_n). **(01 point)**
2. Pour tout entier naturel n , on pose $V_n = 12U_n - 18n + 45$.
   a. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$. **(01 point)**
   b. En déduire l'expression de V_n en fonction de n puis, celle de U_n en fonction de n. **(01 point)**

EXERCICE 3 : (08 points)

Soit f la fonction numérique à variable réelle définie par : $\begin{cases} f(x)=\frac{1}{x}\int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \text{ , si } x\neq 0 \\ f(0)=1 \end{cases}$.

On note (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

1. Déterminer le domaine de définition de f. **(01 point)**
2. Montrer que f est paire. **(01 point**
3. Pour tout $x > 0$, montrer que :
   a. $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \leq \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt \leq x$. **(01 point**
   b. En déduire que f est continue en 0. **(00,5 point)**
4. Montrer que : $\forall\, t \geq 1$; $\frac{1}{\sqrt{1+t^2}} < \frac{1}{\sqrt{t}}$, puis en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. **(01,5 point)**
5. Etudier les variations de la fonction f puis établir le tableau de variations de f. **(02 points)**
6. Tracer la courbe (C_f). **(01 point**