UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR

OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.sn
Site web: officedubac.sn

n° 2025GS26RA0132
Durée : 4 heures
Séries : S2-S2A-S4-S5
Coef 5
Epreuve du 1er groupe

M A T H E M A T I Q U E S
C O R R I G É

Exercice 1 (04 points).
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.
On considère l'équation d'inconnue un nombre complexe z suivante :

$$(H) : z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = 0.$$

1. a. Vérifions que i est une solution de cette équation.

$i^3+(3-2i)i^2+(1-4i)i-1-2i = -i-3+2i+i+4-1-2i = -i+2i+i-2i-3+4-1 = 0i+0 = 0.$
Donc i est une solution de l'équation (H). **0,5 pt**

b. Résolvons l'équation (H) dans $\mathbb{C}$.

- Déterminons le polynôme g tel que $z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = (z-i)g(z)$.

	1	3-2i	1-4i	-1-2i
i		i	3 i +1	2i +1
	1	3- i	2-i	0

$g(z) = z^2 + (3-i)z + 2 - i.$ **0,5 pt**

Commentaire *: Si le candidat utilise la méthode de la division euclidienne ou la méthode d'identification des coefficients pour déterminer le polynôme g tel que $z^3 + (3-2i)z^2 + (1-4i)z - 1 - 2i = (z-i)g(z)$, alors vous lui donnez* ***0,5 point****.*

- Résolvons l'équation $g(z) = 0$.

— Calculons le discriminant Δ de g.
$\Delta = (3-i)^2 - 8 + 4i = 9 - 1 - 6i - 8 + 4i = -2i.$
$\Delta \neq 0$, g admet deux racines distinctes :
$z_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+i-\sqrt{\Delta}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-3+i+\sqrt{\Delta}}{2}$.
Déterminons les racines carrées de Δ.
Soit le nombre complexe w tel que $\Delta = w^2$. Posons $w = x + iy$, puis résolvons le système

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ 2ixy & = & -2i \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{cases}.$$

Ce qui implique

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 0 \\ xy & = & -1 \\ x^2 + y^2 & = & 2 \end{cases}.$$

Ce qui donne

$$\begin{cases} x^2 & = & 1 \\ y^2 & = & 1 \\ xy & < & 0 \end{cases}.$$

D'où $w = 1 - i$ ou $w = -1 + i$. **0,5 pt**

Commentaire *: Pour déterminer les racines carrées w de Δ, si le candidat cherche leurs formes exponentielles ou trigonométriques puis en déduire leurs formes algébriques, alors vous lui donnez **0,5 point**.*

— Donnons les formes algébriques des racines z_1 et z_2 de g sont :

$z_1 = \dfrac{-3+i-\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-3+i-1+i}{2} = -2+i$ et

$z_2 = \dfrac{-3+i+\sqrt{\Delta}}{2} = \dfrac{-3+i+1-i}{2} = -1$. **0,5 pt**

- D'où l'ensemble des solutions S de l'équation (H) est : $S = \{i,\ -1,\ -2+i\}$.

2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1, z_B = i$ et $z_C = -2+i$; r la rotation de centre O, d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit E l'image de B par r et F l'image de A par r.

a. Donnons l'écriture complexe de r.

L'écriture complexe d'une rotation d'angle θ et de centre Ω d'affixe z_Ω est donnée par la formule

$$z' - z_\Omega = e^{i\theta}(z - z_\Omega).$$

D'où l'écriture complexe de r, rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$, est : $z' = e^{i\frac{\pi}{4}}z$. Ce qui implique que $z' = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z$. **0,5 pt**

b. Démontrons que l'affixe du point E est : $z_E = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

E étant l'image de B par r donc $z_E = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z_B$.

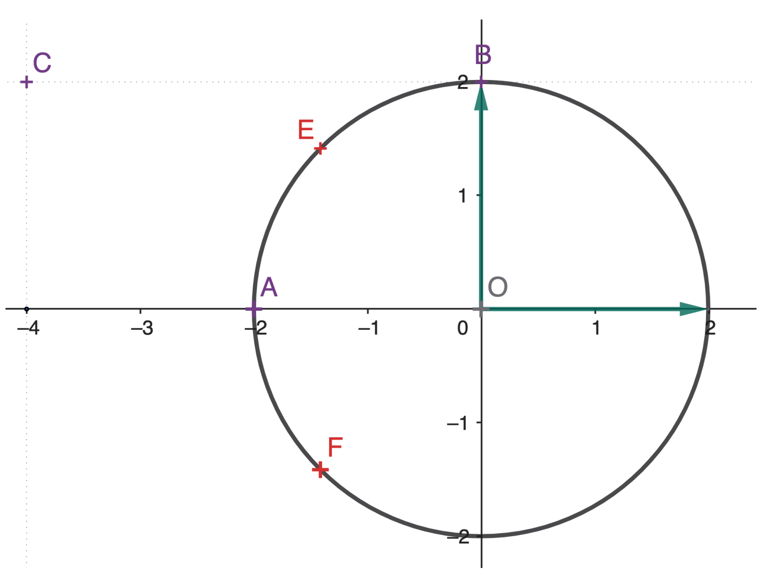
Ce qui implique que $z_E = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)i = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **0,5 pt**

c. Déterminons l'affixe z_F du point F.

F étant l'image de A par r donc $z_F = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)z_A$.

Ce qui implique que $z_F = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(-1) = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. **0,5 pt**

d. Plaçons les points A, B, C, E et F dans le repère. On remarque que les points A, B, E et F sont sur le cercle unité. **0,5 pt**



0,5 pt

Exercice 2 (05 points).

Dans cet exercice, les outils mathématiques au programme de Terminale $S2$ utilisés par l'élève sont les "**Probabilités**". L'expérience aléatoire consiste à tirer simultanément deux numéros dans une boîte contenant les 6 cartons verts et les 3 cartons jaunes.

Le nombre de tirages possibles correspond au nombre de combinaisons de 2 éléments pris parmi 9. Le nombre de tirages possibles est : $C_9^2 = \dfrac{9!}{7! \times 2!} = 36.$ **01 pt**

1. Déterminons les nombres possibles de jours pendant lesquels le GIE sera représenté physiquement au salon.

- Si les deux cartons tirés sont jaunes, on aura les combinaisons possibles suivantes : $\{F1, F2\}$; $\{F1, F3\}$ et $\{F2, F3\}$.
  Les nombres possibles de jours pendant lesquels le GIE sera représenté par une équipe de deux femmes est : $3, 4$ et 5. **0,5 pt**
- Si les deux cartons tirés sont verts, on aura les combinaisons possibles suivantes : $\{H1, H2\}$; $\{H1, H3\}$; $\{H1, H4\}$; $\{H1, H5\}$; $\{H1, H6\}$; $\{H2, H3\}$; $\{H2, H4\}$; $\{H2, H5\}$; $\{H2, H6\}$; $\{H3, H4\}$; $\{H3, H5\}$; $\{H3, H6\}$; $\{H4, H5\}$; $\{H4, H6\}$; $\{H5, H6\}$.
  Le nombre possible de jours pendant lesquels le GIE sera représenté par une équipe de deux hommes est : $1, 2, 3, 4$ et 5. **0,5 pt**
- Si les deux cartons tirés sont de couleurs différents, le GIE ne sera pas représenté physiquement au salon, donc le nombre de jours est **nul**. **0,5 pt**

En résumé, les nombres possibles de jours n pendant lesquels le GIE sera représenté physiquement au salon sont : $0, 1, 2, 3, 4$ et 5. **0,5 pt**

2. Déterminons la moyenne des nombres de jours obtenus si l'on répète un grand nombre de fois le même tirage.

Soit X la variable aléatoire correspondant aux nombres possibles de jours pendant lesquels le GIE sera représenté. À l'aide des combinaisons possibles obtenues lors du tirage, X suit la loi de probabilité donnée par le tableau ci-dessous :

n_i	0	1	2	3	4	5
$P(X = n_i)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$

2 pts

La moyenne pondérée des nombres de jours possibles obtenus correspond à $E(X)$. On a

$E(X) = \sum_{i=1}^{6} n_i P(X = n_i) = \dfrac{5}{36} + \dfrac{8}{36} + \dfrac{12}{36} + \dfrac{12}{36} + \dfrac{12}{36} = \dfrac{49}{36}.$ **1 pt**

<u>Grille de correction de la situation</u> *: Les* **6 points** *des deux consigne seront distribués comme suit : le candidat*

- *identifie le nombre de combinaisons possibles qu'il doit avoir dans cette situation.* **01 pt**
- *explique toutes les combinaisons possibles lors du tirage.* **2 pts**
- *détermine la loi de probabilité de la variable aléatoire X correspondant aux nombres possibles de jours pendant lesquels le GIE sera représenté au salon.* **0,5 pt**
- *détermine $E(X)$.* **0,5 pt**
- *fait correctement les calculs.* **0,5 pt**
- *produit des résultats conformes aux résultats attendus.* **0,5 pt**
- *produit un résultat en adéquation avec la démarche.* **0,5 pt**
- *présente clairement et proprement les résultats.* **0,5 pt**

.

PROBLEME (10 points).

Commentaire *: Dans les trois parties qui suivent, le correcteur doit tenir compte de la démarche, du raisonnement et de la justesse des résultats dans l'appréciation des copies des élèves.*

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A

On considère l'équation différentielle (E) : $y^{''} - y^{'} - 2y = 0$.

1. Résolvons (E).

Soit $r^2 - r - 2 = 0$ l'équation caractéristique de (E). **0, 25 pt**

$r^2 - r - 2 = 0 \Longleftrightarrow (r-2)(r+1) = 0$. Ce qui implique que $r = 2$ ou $r = -1$. **0, 25 pt**

La solution générale de (E) est $g(x) = k_1 e^{2x} + k_2 e^{-x}$. **0, 25 pt**

2. Déterminons la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 3)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses.

Soit $h(x)$ cette solution particulière.
— La courbe de h passe par le point A si, et seulement si $h(0) = 3$. Ce qui implique que

$$k_1 + k_2 = 3. \tag{0.1}$$

0, 25 pt

— La courbe de h admet au point A une tangente parallèle à l'axe des abscisses si, et seulement si $h^{'}(0) = 0$. Ce qui implique que

$$2k_1 - k_2 = 0. \tag{0.2}$$

0, 25 pt

(0.1) et (0.2) est équivalent à $\begin{cases} k_1 + k_2 & = & 3 \\ 2k_1 - k_2 & = & 0 \end{cases}$.

Ce qui donne $k_1 = 1$ et $k_2 = 2$. D'où $h(x) = e^{2x} + 2e^{-x}$. **0, 25 pt**

Partie B

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2}\ln(x+1) & \text{si} \quad x > 0 \\ e^{2x} + 2e^{-x} - 3 & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$,

$(\mathcal{C}_f)$.

1. Déterminons le domaine de définition D_f de f.

- $\sqrt{x+2}$ existe si, et seulement si $x \geq -2$.

  $\ln(x+1)$ existe si, et seulement si $x > -1$.

  Ce qui implique que $\sqrt{x+2}\ln(x+1)$ existe si, et seulement si $x > -1$.

  Donc $x \mapsto \sqrt{x+2}\ln(x+1)$ est bien définie si $x > 0$.

- $e^{2x}+2e^{-x}-3$ existe pour tout $x\in\mathbb{R}$.

  Donc $x\mapsto e^{2x}+2e^{-x}-3$ est bien définie si $x\leq 0$.

Donc $D_f=]-\infty,\ 0]\bigcup]0,\ +\infty[=\mathbb{R}$. **$0,5$ pt**

2. Montrons que f est continue sur $\mathbb{R}$.

- Continuité sur $]0,\ +\infty[$.
  $x\mapsto\sqrt{x+2}$ est continue sur $[-2,\ +\infty[$ par composée.
  $x\mapsto\ln(x+1)$ est continue sur $]-1,\ +\infty[$ par composée.
  $x\mapsto\sqrt{x+2}\ln(x+1)$ est continue sur $]0,\ +\infty[$ par somme.
  0.25 pt
- Continuité sur $]-\infty,\ 0[$. **0.25 pt**
  $x\mapsto e^{2x}+2e^{-x}-3$ est continue sur $\mathbb{R}$ par composée.
  D'où $x\mapsto e^{2x}+2e^{-x}-3$ est continue sur $]-\infty,\ 0[$.
- Continuité en 0.

$$f(0)=0. \tag{0.3}$$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+2}\ln(x+1)=0. \tag{0.4}$$

$$\lim_{x\to 0^-}f(x)=\lim_{x\to 0^-}e^{2x}+2e^{-x}-3=0. \tag{0.5}$$

(0.3), (0.4) et (0.5) impliquent que f est continue en 0. **$0,5$ pt**

3. Déterminons les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.

- Limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}e^{2x}+2e^{-x}-3=+\infty \text{ (par somme).}$$ **$0,25$ pt**

- Limite de f en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x+2}\ln(x+1)=+\infty \text{ (par composée puis par produit).}$$ **$0,25$ pt**

4. Etudions la nature des branches infinies de $(\mathcal{C}_f)$.

- $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^{2x}+2e^{-x}-3}{x}=+\infty$ (en utilisant la limite usuelle $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^a}$).

  $(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique de d'axe (Oy) en $-\infty$. **$0,25$ pt**

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x+2}\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}\ln(x+1)}{\sqrt{x}}=0$

  (en utilisant la limite usuelle $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^a}$).

$(\mathcal{C}_f)$ admet une branche parabolique d'axe (Ox) en $+\infty$. **$0,25$ pt**

5. Etudions la dérivabilité de f en 0 et interprétons géométriquement les résultats.

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}+2e^{-x}-3}{x}=2\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{2x}-1}{2x}-2\lim_{x\to 0^-}\frac{e^{-x}-1}{-x}=2-2=0$ (en utilisant les limites usuelles $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}$).
  f est dérivable en 0 à gauche, de nombre dérivé nul. **0,25 pt**
  $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente horizontale en 0 à gauche. **0,25 pt**

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sqrt{x+2}\ln(x+1)}{x}=\lim_{x\to 0^+}\sqrt{x+2}\frac{\ln(x+1)}{x}=\sqrt{2}$. (en utilisant les limites usuelles $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}$).
  f est dérivable en 0 à droite, de nombre dérivé égal à $\sqrt{2}$. **0,25 pt**
  $(\mathcal{C}_f)$ admet une tangente de pente $\sqrt{2}$ en 0 à droite. **0,25 pt**

6. Calculons $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,\ 0[$ et $]0,\ +\infty[$ et étudie son signe.

- Dérivée de f sur $]0,\ +\infty[$.

  Sur $]0,\ +\infty[$, $f(x)=\sqrt{x+2}\ln(x+1)\Longrightarrow f'(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+2}}+\dfrac{\sqrt{x+2}}{x+1}$

$$f'(x)=\frac{(x+1)\ln(x+1)+2(x+2)}{2(x+1)\sqrt{x+2}}.$$

0,5 pt

  Signe de la dérivée de f sur $]0,\ +\infty[$.

  $f'(x)=\dfrac{(x+1)\ln(x+1)+2(x+2)}{2(x+1)\sqrt{x+2}}$.

  Pour tout $x>0$, $(x+1)\ln(x+1)+2(x+2)>0$ et $2(x+1)\sqrt{x+2}>0$.
  Ce qui implique que $f'(x)>0$ sur $]0,\ +\infty[$. **0,25 pt**

- Dérivée de f sur $]-\infty,\ 0[$.

  Sur $]-\infty,\ 0[$, $f(x)=e^{2x}+2e^{-x}-3\Longrightarrow f'(x)=2e^{2x}-2e^{-x}$. **0,5 pt**

  Signe de la dérivée de f sur $]-\infty,\ 0[$.

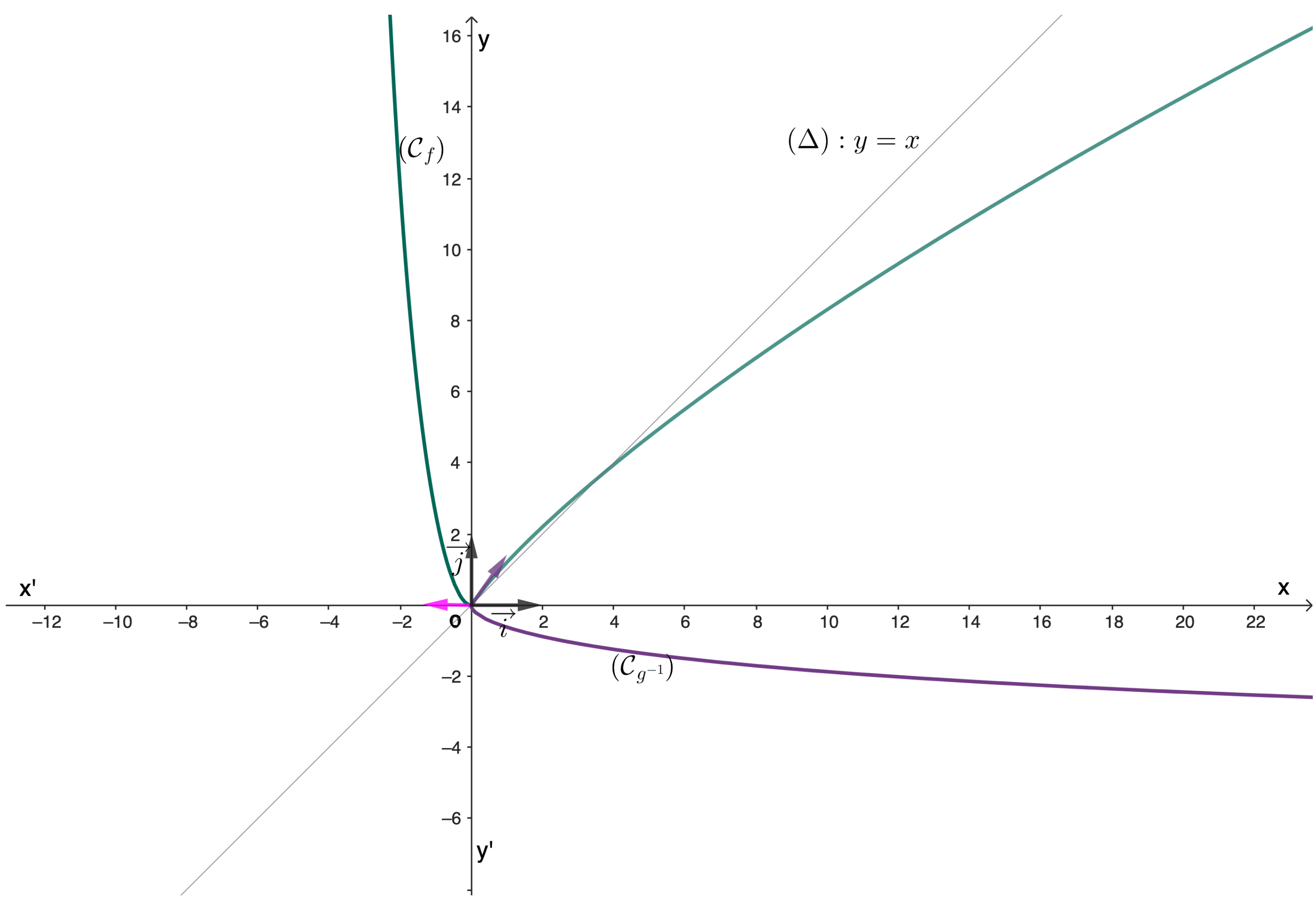
  $f'(x)=2e^{2x}-2e^{-x}=\dfrac{2(e^{3x}-1)}{e^x}$. $f'(x)$ est du même signe que $e^{3x}-1$ sur $]-\infty,\ 0[$.
  Ce qui implique que $f'(x)<0$ sur $]-\infty,\ 0[$. **0,25 pt**

7. Dressons le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	$\mathbf{0} \,\Vert\, \sqrt{2}$	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

0, 5pt

8. Construction de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ dans le plan muni du repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, voir figure ci-dessous.



1 pt

Partie C

1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,\ 0]$.

a. Montrons que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition.

La fonction g est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,\ 0]$ (voir tableau de variations de f), donc elle est bijection de $]-\infty,\ 0]$ sur $g(]-\infty,\ 0]) = [0,\ +\infty[$.

Par conséquent g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $[0,\ +\infty[$. **0, 5pt**

b. Construction de la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le même repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$, voir figure ci-dessus. **0, 5pt**

2. a. Calculons en cm^2 l'aire $A(P)$ de la partie P du plan comprise entre la courbe $(\mathcal{C}_f)$, l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$.

$$A(P) = \int_{-1}^{0} f(x)dx \times u.a = \int_{-1}^{0} (e^{2x} + 2e^{-x} - 3)dx \times u.a = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 2e^{-x} - 3x\right]_{-1}^{0} \times u.a$$

$$= \left(-\frac{9}{2} - \frac{1}{2e^2} + 2e\right) \times 4cm^2 = \frac{8e^3 - 18e^2 - 2}{e^2}cm^2.$$

0, 5pt

b. Pour $-1 \leq x \leq 0$, on fait tourner $(\mathcal{C}_f)$ autour de l'axe des abscisses, engendrant un solide S.

Calculons en cm^3 le volume $V(S)$ de ce solide S.

Le volume $V(S)$ du solide S est donné par l'intégrale

$$V(S) = \pi \int_{-1}^{0} \Big(f(x)\Big)^2 dx \times u.vcm^3 = \pi \int_{-1}^{0} \Big(e^{2x} + 2e^{-x} - 3\Big)^2 dx \times u.vcm^3$$

$$V(S) = \pi \int_{-1}^{0} \Big(e^{4x} - 6e^{2x} + 4e^{x} + 9 + 4e^{-2x} - 12e^{-x}\Big)dx \times u.vcm^3$$

$$= \pi \left[\frac{1}{4}e^{4x} - 3e^{2x} + 4e^{x} + 9x - 2e^{-2x} + 12e^{-x}\right]_{-1}^{0} \times 8cm^3$$

$$= 8\pi \left[\frac{1}{4}e^{4x} - 3e^{2x} + 4e^{x} + 9x - 2e^{-2x} + 12e^{-x}\right]_{-1}^{0} cm^3$$

$$V(S) = \pi \left(\frac{16e^6 - 96e^5 + 162e^4 - 32e^3 + 24e^2 - 2}{e^4}\right)cm^3.$$

0, 5 pt