

M A T H E M A T I Q U E S

Les calculatrices électroniques non imprimantes avec entrée unique par clavier sont autorisées.

Les calculatrices permettant d'afficher des formulaires ou des tracés de courbe sont interdites.

Leur utilisation sera considérée comme une fraude.(CF.Circulaire n^o 5990/OB/DIR. du 12 08 1998)

EXERCICE 1 (04 points).

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O ; \vec{u}, \vec{v})$ d'unité 2cm.

On considère l'équation d'inconnue un nombre complexe z suivante :

$$(H) : z^3 + (3 - 2i)z^2 + (1 - 4i)z - 1 - 2i = 0.$$

1. a. Vérifie que i est une solution de cette équation. 0,5 pt
- b. Résous l'équation (H) dans \mathbb{C} . 1,5 pt
2. Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -1, z_B = i$ et $z_C = -2 + i$; r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$. Soit E l'image de B par r et F l'image de A par r .
 - a. Donne l'écriture complexe de r . 0,5 pt
 - b. Démontre que l'affixe du point E est : $z_E = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$. 0,5 pt
 - c. Détermine l'affixe z_F du point F . 0,5 pt
 - d. Place les points A, B, C, E et F dans le repère. 0,5 pt

EXERCICE 2 (06 points).

Un GIE agroalimentaire est composé de 6 hommes portant des badges verts numérotés de 1 à 6 et 3 femmes portant des badges jaunes numérotés de 1 à 3. Le GIE doit participer à un salon d'agriculture organisé cette année pour y présenter ses produits. Ses membres décident des modalités de la participation au salon, et puis procèdent à un tirage en même temps de deux badges pour constituer une équipe de deux personnes pour les représenter.

- Si les deux numéros de badges tirés sont ceux de deux femmes, alors elles feront au salon un nombre de jours total égal à la somme de leurs numéros respectifs.
- Si les deux numéros de badges tirés sont ceux de deux hommes, alors ils feront au salon un nombre de jours total égal à la valeur absolue de la différence de leurs numéros respectifs.
- Si les deux numéros de badges tirés sont ceux d'une femme et d'un homme, alors l'équipe ne participera physiquement au salon. Elle fera une présentation en ligne.

1. Détermine les nombres possibles de jours pendant lesquels le GIE sera représenté physiquement au salon. 03 pts
2. Quelle est la moyenne pondérée des nombres de jours possibles obtenus? 03 pts

PROBLÈME (10 points).

Le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité 2 cm.

Partie A

On considère l'équation différentielle $(E) : y'' - y' - 2y = 0$.

1. Résous (E) . **0,75 pt**
2. Détermine la solution particulière de (E) dont la courbe représentative passe par le point $A(0, 3)$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. **0,75 pt**

Partie B

Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par : $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x+2} \ln(x+1) & \text{si } x > 0 \\ e^{2x} + 2e^{-x} - 3 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$,

(\mathcal{C}_f) est sa courbe représentative.

1. Détermine le domaine de définition D_f de f . **0,5 pt**
2. Montre que f est continue sur \mathbb{R} . **1 pt**
3. Détermine les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. **0,5 pt**
4. Etudie la nature des branches infinies de (\mathcal{C}_f) . **0,5 pt**
5. Etudie la dérivabilité de f en 0 et interprète géométriquement les résultats. **1 pt**
6. Calcule $f'(x)$ sur chacun des intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ et étudie son signe. **1,5 pt**
7. Dresse le tableau de variations de f . **0,5pt**
8. Construis la courbe (\mathcal{C}_f) . **1 pt**

Partie C

1. Soit g la restriction de f à l'intervalle $] -\infty, 0]$.
 - a. Montre que g admet une fonction réciproque g^{-1} dont on précisera l'ensemble de définition. **0,5pt**
 - b. Construis la courbe $(\mathcal{C}_{g^{-1}})$ de g^{-1} dans le même repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. **0,5pt**
2. a. Calcule en cm^2 l'aire $A(P)$ de la partie P du plan comprise entre la courbe (\mathcal{C}_f) , l'axe des abscisses, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 0$. **0,5pt**
 - b. Pour $-1 \leq x \leq 0$, on fait tourner (\mathcal{C}_f) autour de l'axe des abscisses, ce qui engendre un solide S . Calcule en cm^3 le volume $V(S)$ de ce solide S . **0,5 pt**