UNIVERSITÉ CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
♦
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

2026TF621NA0120
Durée: 04 heures
Série : F6– Coef. 4

Epreuve du 1[er] groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1 (5 points)

Soit P le polynome dans $\mathbb{C}$ défini par : $P(z) = z^3 - 2(1+2i)z^2 + 7iz + 3(1-3i)$.

1. Montrer que P admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera.

Posons $z_0 = \alpha i, \alpha \in \mathbb{R}$.

Le nombre complexe z_0 est racine de $P \Leftrightarrow -i\alpha^3 + 2(1+2i)\alpha^2 + 7i(i\alpha) + 3 - 9i = 0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^3 + 4\alpha^2 - 9 = 0 \quad (1) \\ 2\alpha^2 - 7\alpha + 3 = 0 \quad (2) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 3$$

Donc, P admet une seule racine imaginaire pure qui est $3i$. **1 pt**

2. Résoudre alors l'équation : $P(z) = 0$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow (z - 3i)[z^2 - (2+i)z + 3 + i] = 0$$
$$\Leftrightarrow z - 3i = 0 \text{ ou } z^2 - (2+i)z + 3 + i = 0$$
$$\Leftrightarrow z = 3i \text{ ou } z = 1 - i \text{ ou } z = 1 + 2i$$

1,5 pt

3. Dans le plan complexe, on considère les points $A(3i), B\ (1-i)$et $C(1+2i)$.
Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme.

Le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DB}$

$$\Leftrightarrow z_D = z_B - z_C + z_A$$
$$\Leftrightarrow z_D = 0$$

1 pt

4. Les points C, D et $E(2)$ représentent les positions respectives de 3 villages d'un même terroir.

Un fils du terroir souhaiterait offrir un forage aux 3 villages à une position équidistante des trois villages.

Quel devrait l'affixe ω du point Ω représentant la position du forage ?

Le point Ω doit être le point d'intersection des 3 médiatrices du triangle CDE.

La médiatrice du segment $[DE]$ a pour équation $x = 1$. Posons $\omega = 1 + iy$

Soit I le milieu de $[DE]$. On a $z_I = 1$

Le point Ω tel que $\overrightarrow{C\Omega} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CI}$, donc $\omega = 1 + \frac{2}{3}i$ **1,5 pt**

Exercice 2 (5 points)

Une entreprise pharmaceutique souhaite expédier des échantillons de médicaments dans des caisses.

Le prototype de caisse est représenté, dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, par la figure $ABCS$ où $A(4,0,0), B(0,4,0), C(0,0,4)$ et $S(4,4,4)$ représentent les sommets de la caisse.

L'unité est le décimètre.

1. Justifie que les points A, B et C définissent un plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-4,4,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-4,0,4)$ ne sont pas colinéaires. Donc, les points A, B et C définissent un plan. **0,5 pt**

2. Déterminer une équation cartésienne du plan ABC.

Le plan ABC a pour équation $x+y+z-4=0$ **1 pt**

3. Justifie que les points A, B, C et S sont les sommets d'un tétraèdre.

Le point S n'appartient pas au plan ABC. Donc les points A, B, C et S sont les sommets d'un tétraèdre. **1,5 pt**

4. L'entreprise souhaite remplir ces caisses avec des petites boîtes de médicaments parallélépipédiques de dimensions 5 cm, 3 cm et 2 cm.

Quel est le nombre maximum de boîtes que pourrait contenir une caisse ?

- L'aire du triangle ABC est $8\sqrt{3}$ dm^2
- La hauteur du tétraèdre est $\frac{4\sqrt{3}}{3}$ dm
- Le volume d'une caisse est : $V = \frac{1}{3} \times 8\sqrt{3} \times \frac{4\sqrt{3}}{3} dm^3 = \frac{32}{3}$ dm^3 . **1 pt**
- Le volume d'une boite est $v = 5 \times 3 \times 2 = 30$ cm^3 **0,5 pt**
- Le nombre maximal de boites est $N = E\left(\frac{\frac{32}{3} \times 1000 \text{ cm3}}{30}\right) = 355$ boites. **0,5 pt**

Problème (10 points)

Partie I (02,75 points)

Soit g la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x-1$.

1. Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$ ·

$\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=-\infty$ 0,5 pt

$\lim\limits_{x\to0^+} g(x)=+\infty$ 0,5 pt

2. **a)** Calculer l'expression $g'(x)$ de la fonction dérivée g' de g.

$g'(x)=-\left(\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x}\right)$ **0,5 pt**

b) En déduire le sens de variation de g sur $]0,+\infty[$

$\forall\, x\in]0;+\infty[$ on a : $\frac{2}{(x+1)^2}>0$ et $\frac{1}{2x}>0$, alors $\left(\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x}\right)>0$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$

Donc $-\left(\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{2x}\right)<0$ $\forall\, x\in]0;+\infty[$

D'ou $g'(x)<0$ $\forall\, x\in]\,0\,;+\infty\,[$

Alors g est décroissante sur $]0,+\infty[$. **0,5 pt**

3. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0,1]$ et $[1,+\infty[$.

On a $g(1)=\frac{2}{1+1}-\frac{1}{2}\ln(1)-1=0$. D'où $g(1)=0$ **0,25 pt**

Sur l'intervalle $]0,1]$, on a $x\leq 1$ Donc $g(x)\geq g(1)$ (car la fonction g est décroissante). Alors $g(x)\geq 0$ pour $x\in]0,1]$

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$[, on a $x\geq 1$ Donc $g(x)\leq g(1)$ (car la fonction g est décroissante Alors $g(x)\leq 0$ pour $x\in[1,+\infty[$ **0,5 pt**

Partie II (05,75 points)

On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité graphique 2 cm.

1. **a)** Calculer la limite en 1 de $f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

Attention : Il s'agit de la limite en 0 qui est égale à $+\infty$. La droite d'équation $x=0$ est asymptote

Le candidat qui calcule la limite en 1 comme c'est demandé dans l'énoncé par erreur obtient les 0,75 points

b) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$ puis calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right)=+\infty$ **0,5 pt**

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2+x}-\frac{1}{2}\frac{\ln x}{x}\right)=1$ **0,5 pt**

c) Calculer la limite en $+\infty$ de $[f(x)-x]$, puis interpréter géométriquement le résultat.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)-x = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x - x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1-x^2-x}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x = -\infty$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1-x}{x+1} = -1$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{1}{2}\ln x = -\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = -\infty$ 0,75 pt

Interprétation géométrique :

Puis que on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x = -\infty$

Alors (cf) admet une branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation $y = x$ en $+\infty$

0,25 pt

2. a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0,+\infty[$, $f(x)-x = g(x)$.

$$f(x)-x = \frac{x^2+1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x - x$$

$$= x-1+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x - x$$

$$= -1+\frac{2}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x = g(x)$$

D'où $f(x)-x = g(x)$ **0,5 pt**

b) En déduire la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$.

Sur l'intervalle $]0,1]$, $g(x)\geq 0$, donc (C) est au-dessus de (Δ)

Sur l'intervalle $[1,+\infty[$, $g(x)\leq 0$ donc (C) est au-dessous de (Δ) **0,5 pt**

3. a) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que pour tout réel x appartenant à $]0,+\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{2x(x+1)^2}.$$

La fonction est la somme de fonctions dérivables donc, elle est dérivable

$$f'(x) = \left(\frac{x^2+1}{x+1}-\frac{1}{2}\ln x\right)' = \frac{2x(x+1)-(x^2+1)}{(x+1)^2}-\frac{1}{2x} = \frac{2x^2+2x-x^2-1}{(x+1)^2}-\frac{1}{2x} = \frac{2x(2x^2+2x-x^2-1)-(x+1)^2}{2x(x+1)^2}$$

$$= \frac{2x^3+4x^2-2x-x^2-2x-1}{2x(x+1)^2} = \frac{2x^3+3x^2-4x-1}{2x(x+1)^2}$$

Posons $p(x) = 2x^3+3x^2-4x-1$

On a : $p(1) = 0$ alors 1 est racine de $p(x)$.

Factorisons $p(x)$.

$2x^3 + 3x^2 - 4x - 1$=(x-1)(a$x^2 + bx + c$)

=a$x^3 + bx^2 + cx -$ a$x^2 - bx - c$

= a$x^3 + x^2(b-a) + x(c-b) - c$

Par identification on a : $a = 2; b - a = 3;\ c - b = -4\ et - c = -1.$

Donc on a : $a = 2\ ; b = 5\ ; et\ c = 1$.

D'où $p(x)$=(x-1)($2x^2 + 5x + 1$) .

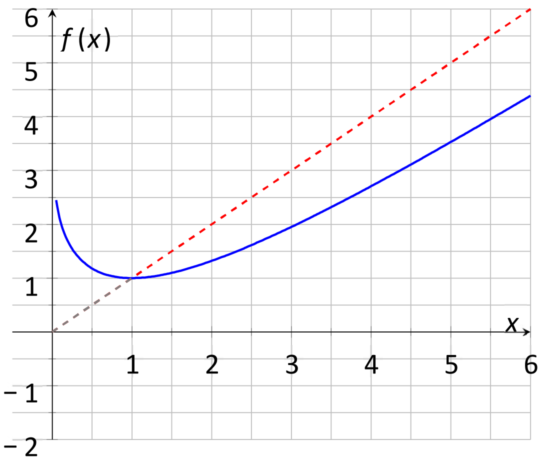
Donc $f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{2x(x+1)^2}$ **0,5 pt**

b) Dresser le tableau de variations de f.

x	0		1		$+\infty$
$f(x)'$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

0,75 pt

4. a) Tracer (C) et la droite (Δ) : $y = x$ dans le plan muni du repère $(O\ ; \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.



0,75 pt

Partie III (01,5 points)

Soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = 2\ln(1+x) - \frac{1}{2}x\ln x - \frac{x}{2}$.

1. Montrer que G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$.

$$G'(x == \frac{2}{1+x} - \frac{1}{2}(\ln x + 1) - \frac{1}{2} = g(x)$$

Donc, G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$. **0,5 pt**

2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C), (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

Soit $\mathcal{A}$ cette aire

$\mathcal{A} = \int_1^2 \left(x - f(x)\right) dx \times 4 \text{ cm}^2 = \int_1^2 -g(x)\, dx \times 4 \text{ cm}^2 = \left(G(1) - G(2)\right) \times 4 \text{ cm}^2 = \ldots\ldots$ **1 pt**