UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
♦
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

20263T05AN01A29
Durée: 04 heures
Séries : STIDD – T1 Coef. 5
Série : T2 coef : 4
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

Exercice 1 (5 points)

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $z^3-(1+2i)z^2+3(1+i)z-10(1+i)=0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une seule solution imaginaire pure que l'on déterminera.

Posons $z_0=\alpha i, \alpha \in \mathbb{R}$.

Le nombre complexe z_0 est solution de $(E) \Leftrightarrow -i\alpha^3+(1+2i)\alpha^2+3i\alpha(1+i)-10-10i=0$.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha^3+2\alpha^2+3\alpha-10=0 & (1) \\ \alpha^2-3\alpha-10=0 & (2) \end{cases}$$

L'équation (2) admet pour solutions -2 et 5, mais seul le réel -2 est solution de (1).

Donc, l'équation (E) admet une seule solution imaginaire pure qui est $-2i$. **0,5 pt**

2. a) Déterminer les racines carrées du nombres complexe $5-12i$.

Posons $z=x+iy$, $x\in\mathbb{R}$ et $y\in\mathbb{R}$

Le nombre complexe z est racine carrée de $5-12i \Leftrightarrow z^2=5-12i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2=13 \\ x^2-y^2=5 \\ 2xy=-12 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z=3-2i \text{ ou } z=-3+2i.$$

Les racines carrées de $5-12i$ sont $3-2i$ et $-3+2i$. **0,5 pt**

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

$$(E) \Leftrightarrow (z+2i)[z^2-(1+4i)z-5+5i]=0$$

$$\Leftrightarrow z=-2i \text{ ou } z^2-(1+4i)z-5+5i=0$$

Résolvons l'équation $z^2-(1+4i)z-5+5i=0$.

$$\Delta=5-12i$$

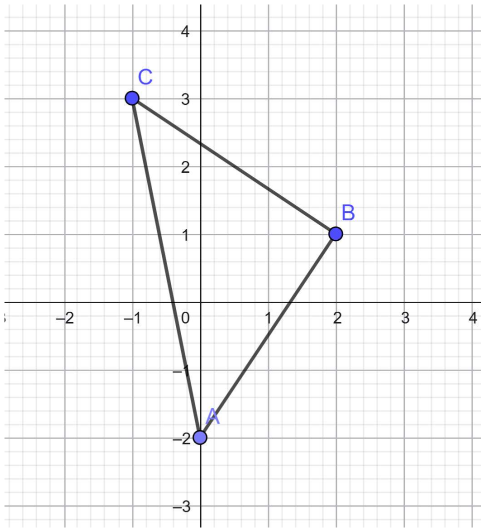
Le nombre complexe $3-2i$ est une racine carrée de Δ.

Les solutions sont alors : $2+i$ et $-1+3i$.

$S=\{-2i\,,2+i\,,-1+3i\}$ **0,5 pt**

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A=-2i$, $z_B=2+i$ et $z_C=-1+3i$.

1. Placer les points A, B, et C dans le plan complexe.



0,5 pt

2. Déterminer l'argument principal de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis celui de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$.

$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = \frac{-1+3i+2i}{2+i+2i} = \frac{-1+5i}{2+3i} = \frac{(-1+5i)(2-3i)}{13} = 1 + i.$

Donc, $\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = \frac{\pi}{4}$. **0,5 pt**

$$\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{2 + i + 1 - 3i}{-2i + 1 - 3i} = \frac{3 - 2i}{1 - 5i} = \frac{(3 - 2i)(1 + 5i)}{26} = \frac{1}{2}(1 + i).$$

Donc, $\text{Arg}\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = \frac{\pi}{4}$. **0,5 pt**

3. En déduire la nature exacte du triangle ABC.

$\text{Arg}\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) = Mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = \frac{\pi}{4}$ et $\text{Arg}\left(\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right) = Mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right) = \frac{\pi}{4}$

On a $Mes\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = Mes\left(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}\right)$, le triangle ABC est isocèle de sommet principal B. **0,5 pt**

De plus, étant donné que la somme des angles d'un triangle est égale à 180° , $mes(\hat{B}) = 90°$.

Donc, le triangle ABC est rectangle et isocèle. **0,5 pt**

4. Dans une vaste savane représentée par le plan complexe, il y a une zone herbacée représentée par l'ensemble des points M tels que : $\left\|7\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| < 13$.

Un mouton attaché à une position représentée par le point $D(2 + 2i)$ avec une corde de longueur 2 pourra- t- il brouter dans la zone herbacée ?

$\left\|7\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| < 13 \Leftrightarrow 13MG < 13$ où Gest le barycentre de $\{(A, 7), (B, 2); (C, 4)\}$

$\Leftrightarrow MG < 1$

La zone herbacée est représentée par le disque ouvert de centre G d'affixe et de rayon 1 avec

$z_G = \frac{7z_A + 2z_B + 4z_C}{13} = 0$, donc $G = O$. **0,5 pt**

Le mouton circule dans le disque de frontière le cercle de centre D et de rayon 2.

Pour que le mouton puisse brouter dans la zone herbacée, il faut et il suffit que le cercle de centre G et de rayon 1 et le cercle de centre D et de rayon 2 soient sécants, c'est-à-dire : $1 = |1 - 2| < DG < 1 + 2 = 3$.

$z_G = \frac{7z_A + 2z_B + 4z_C}{13} = 0$, donc $G = O$.

Ainsi, $DG = OD = |2 + 2i| = 2\sqrt{2}$.

On a bien $1 < DG < 3$, donc les deux cercles sont sécants.

Par conséquent, le mouton pourra bien brouter dans la zone herbacée. **0,5 pt**

Exercice 2 (5 points)

Pour stocker ses récoltes, une petite entreprise agricole souhaite construire un hangar ayant la forme d'un tétraèdre irrégulier pour s'adapter à une zone accidentée.

Les ingénieurs ont modélisé la structure dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ où l'unité est le mètre.

Les quatre sommets du hangar sont représentés par les points $A(2, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 3)$ et $S(x, y, 6)$ où S représente le sommet supérieur du hangar.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan.

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}(-2,4,0)$ et $\overrightarrow{AC}(-2,0,3)$ ne sont pas colinéaires. Par conséquent les points A, B et C définissent un plan. **0,5 pt**

2. Pour des raisons de stabilité, le projeté orthogonal du sommet S sur le plan ABC doit coïncider avec le centre de gravité G du triangle ABC.

   a) Montrer que le point G a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$.

Le centre de gravité d'un triangle est l'isobarycentre de ses sommets. Ses coordonnées sont :

- $x_G = \frac{x_A+x_B+x_C}{3} = \frac{2+0+0}{3} = \frac{2}{3}$
- $y_G = \frac{y_A+y_B+y_C}{3} = \frac{0+4+0}{3} = \frac{4}{3}$
- $z_G = \frac{z_A+z_B+z_C}{3} = \frac{0+0+3}{3} = 1$

   b) Montrer alors que $x = \frac{49}{6}$ et $y = \frac{61}{12}\cdot$

Pour que le projeté orthogonal de S sur le plan ABC coïncide avec G, il faut que $\overrightarrow{GS}$ orthogonal au plan ABC, c'est-à-dire colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

Le vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(12, 6, 8)$.

Le vecteur $\overrightarrow{GS}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{GS} = k\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R} \text{ tel que } \begin{cases} x = \frac{2}{3} + 12k \\ y = \frac{4}{3} + 6k \\ 6 = 1 + 8k \end{cases}$$

On en déduit que $k = \frac{5}{8}$ et que $x = \frac{49}{6}$ et $y = \frac{61}{12}\cdot$ **2 pts**

3. Le hangar est destiné à stocker des graines dont la masse volumique est **600 kg / m³.** Sachant que les graines sont emballées dans des sacs de **50** kilogrammes, déterminer le nombre maximal de sacs que pourrait contenir ce hangar. **2,5 pts**

   On négligera le volume occupé par les sacs vides.

- Le volume du hangar est : $V = \frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) \cdot \overrightarrow{AS}\right|$. Or, $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(12, 6, 8)$ et $\overrightarrow{AS}\left(\frac{37}{6}, \frac{61}{12}, 6\right)$

  donc $V = \frac{305}{12}\ m^3$. **1,5 pt**
- La masse en kg de graines que peut contenir le hangar est :

  $M = V \times 600 = \frac{305}{12} \times 600 = 15250\ kg.$ **0,5 pt**
- Le nombre maximal de sacs est
- $N = \frac{15250}{50} = 305$ sacs. **0,5 pt**

Problème (10 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire (02,5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x - 1)e^x - 3$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ ·

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = -3 \quad car \begin{cases} \lim\limits_{x \to -\infty} (x-1)e^x = \lim\limits_{x \to -\infty} xe^x - e^x = 0 \\ \lim\limits_{x \to -\infty} (-3) = -3 \end{cases}$ **0,5 pt**
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ **0,25 pt**

2. Calculer l'expression $g'(x)$ de la dérivée de g, étudier son signe puis établir le tableau de variations de g.

- La fonction g est dérivable $\mathbb{R}$ et pour tout réel x, on a $g'(x) = xe^x$ **0,5 pt**
- $g'(x) > 0 \Leftrightarrow x > 0$ **0,25 pt**
- Tableau de variations **0,25 pt**

3. **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$.

La fonction g est continue sur $]-\infty\,;0]$ et $g(]-\infty\,;0]) = [-4\,;-3[$, $0 \notin [-4\,;-3[$ donc l'equation $g(x) = 0$ n'a pas de solution sur$]-\infty\,;0]$

La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0\,;+\infty[$ et $g(]0\,;+\infty[) =]-4;+\infty[$, $0 \in]-4;+\infty[$, donc l'equation $g(x) = 0$ a seule solution α sur $]0\,;+\infty[$

alors l'équation $g(x) = 0$ a seule solution α sur $\mathbb{R}$ **0,25 pt**

De plus, $\boldsymbol{g(1) < 0}$ et $\boldsymbol{g(2) > 0}$. Donc $1 < \alpha < 2$. **0,25 pt**

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

- Si $x \in]-\infty; \alpha[$, on a : $g(x) < 0$
- $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$
- Si $x \in]\alpha\,;+\infty[$, on a : $g(x) > 0$

0,25 pt

Partie B : Étude de la fonction principale (07,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-2x} - 3x$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
(*L'unité graphique est 2* cm)

1. **a)** Déterminer la limite de f en $-\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x\left[(1+\tfrac{1}{x})e^{-2x} - 3\right] = -\infty$$ **0,5 pt**

b. i) Vérifier que pour tout réel x non nul, on a : $f(x) = x\left[\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{xe^{2x}} - 3\right]$.

$$f(x) = (x+1)e^{-2x} - 3x = x\left[\left(1+\tfrac{1}{x}\right)\tfrac{1}{e^{2x}} - 3\right] = x\left[\tfrac{1}{e^{2x}} + \tfrac{1}{xe^{2x}} - 3\right].$$ **0,5 pt**

b. ii) Déterminer alors la limite de *f* en $+\infty$.

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[\tfrac{1}{e^{2x}} + \tfrac{1}{xe^{2x}} - 3\right] = -\infty$$ **0,5 pt**

2. **a)** Montrer que la droite (D) d'équation : $y = -3x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$.

$\lim_{x\to+\infty} (f(x) + 3x) = \lim_{x\to+\infty} \left[\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{xe^{2x}}\right] = 0$ donc la droite d'équation $y = -3x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ **0,5 pt**

b) Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et (C).

$f(x) + 3x = (x+1)e^{-2x}$

- Si $x \in]-\infty; 1[$, on a : (C_f) est en dessous de (D)
- Si $x \in]\,1;\ +\infty\,[$, on a : (Cf) est en dessous de (D)
- (C) et (D) se coupe au point d'abscisse 1 **0,5 pt**

3. **a)** Vérifier que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(-2x)$.

$f'(x) = (-2x-1)e^{-2x} - 3 = g(-2x)$ **0,5 pt**

b) Montrer alors que $f'(x) \geq 0$ si, et seulement si x appartient à $\left]-\infty\,, -\frac{\alpha}{2}\right]$.

$$\boldsymbol{f'(x) \geq 0} \Leftrightarrow g(-2x) \geq \mathbf{0}$$
$$\Leftrightarrow -2x \geq \alpha$$
$$\Leftrightarrow x \leq -\frac{\alpha}{2}$$

0,5 pt

c) Dresser le tableau de variation de *f*.

Tableau de variations **1 pt**

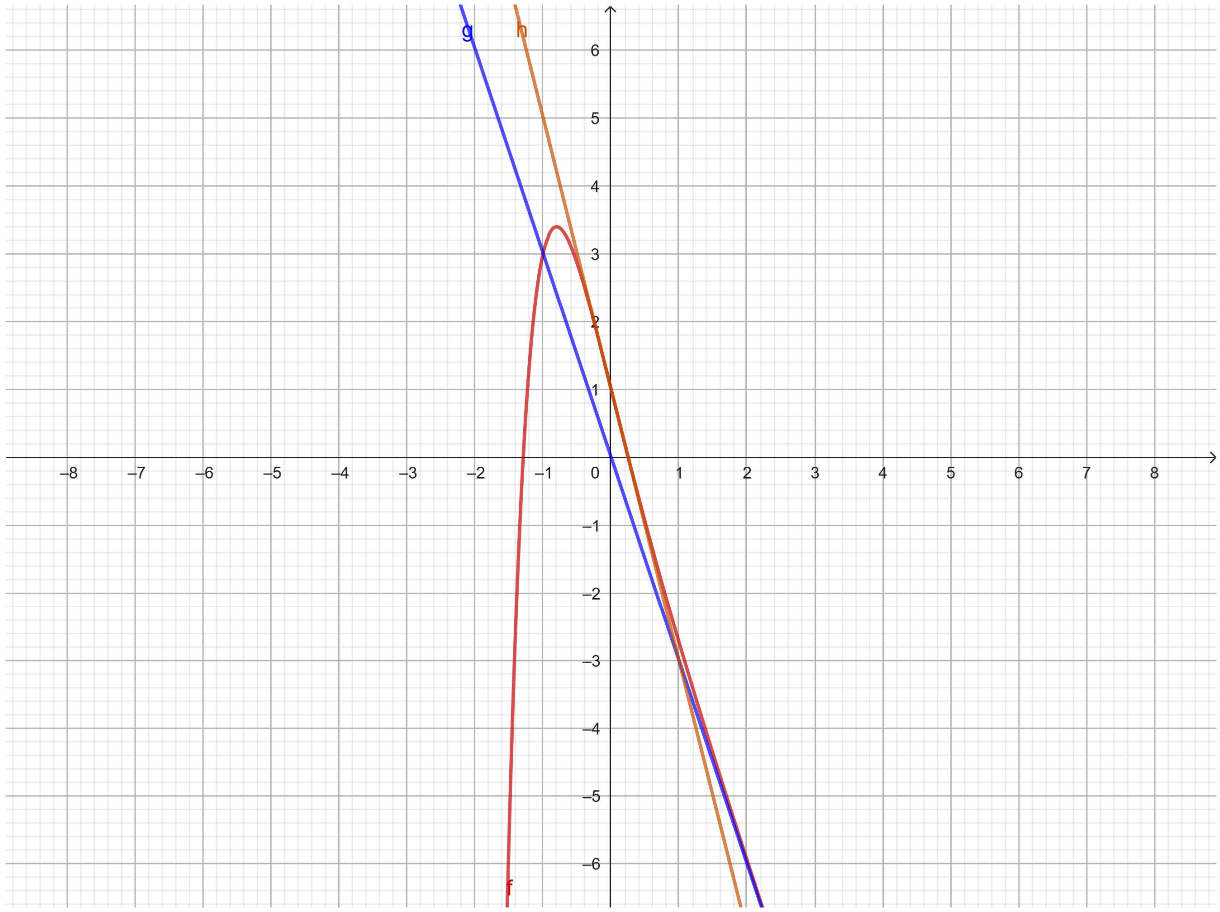
4. **a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point A d'abscisse 0.

$$(T) : \boldsymbol{y = f'(0)x + f(0)}$$

$$(T) : \boldsymbol{y = -4x + 1}$$

0,5 pt

b) Tracer (C), la tangente (T) et l'asymptote (D) dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$.



1 pt

5. Soit $I = \int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx$.

a) Calculer I à l'aide d'une intégration par parties.

$I = \int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx = \left[(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{-2x}\right]_{-1}^{0} = (\frac{-3}{4} + \frac{5}{4}e^2)$ **1 pt**

b) En déduire l'aire du domaine plan, en cm², délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$.

$A = 4cm^2 \int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx = \left[(-\frac{1}{2}x - \frac{3}{4})e^{-2x}\right]_{-1}^{0} 4m^2 = (\frac{-3}{4} + \frac{5}{4}e^2)4cm^2$ **0,5 pt**