UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
□□□□□□
OFFICE DU BACCALAUREAT
E.mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedubac.sn

2026TSTEG37NA0112
Durée : 4 heures
Série : STEG – Coef. 4
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

CORRIGE

EXERCICE 1 **(05 points)**

La directrice d'une entreprise décide d'allouer à ses employés une prime de fin d'année d'un montant de 40 000 F CFA, cette prime étant revalorisée chaque année de 6 000 F CFA.

On note p_0 la prime initiale, et p_n la prime au bout de n années ($n \geq 1$).

1. Calculer p_1 et p_2 .

On a : P_0=40 000

- $P_1 = P_0 + 6000 = 46\,000$ **0,25 pt**
- $P_2 = P_1 + 6000 = 52\,000$ **0,25 pt**

2. Exprimer p_{n+1} en fonction de p_n .

$P_{n+1} = P_n + 6000$ **1 pt**

3. Déterminer alors la nature de la suite (p_n)

La suite (p_n) est une suite arithmétique de raison $r = 6000$. **0,5 pt**

4. En déduire l'expression de p_n en fonction de n.

$P_n = P_0 + nr = 40\,000 + 6\,000n$ **1 pt**

5. Quel est le montant de la prime au bout de 10 ans ?

La prime au bout de 10 ans est $P_{10} = 40\,000 + 6\,000 \times 10 = 100000$ **1 pt**

6. Quel est le montant total de toutes les primes versées à un employé jusqu'à la 10e année incluse ?

Soit S ce montant

$S = P_0 + P_1 + \cdots + P_{10} = \frac{11}{2}(P_0 + P_{10}) = \frac{11}{2}(40000 + 100000) = 770000$ **1 pt**

EXERCICE 2 **(05 points)**

Pour le remboursement d'un véhicule acheté à 8 000 000 FCFA, un jeune entrepreneur a le choix entre trois règlements :

- Soit par un versement unique de 14 098 700 FCFA à une certaine date au taux annuel de 12%.
- Soit par un versement de 5 000 000 FCFA dans 3 ans et 7 517 488 FCFA dans 6 ans au taux annuel de t%.
- Soit par versement de 10 semestrialités constantes : la première dans 2 ans au taux annuel de 10,25%.

1. Calculer la date du versement unique.

Soit n la date du versement unique.

$8\,000\,000 = 14\,098\,700(\,1{,}12)^{-n}$ **0,75 pt**

$n = 5$ ans **0,5 pt**

2. Calculer le taux annuel des deux versements.

$8\,000\,000 = 5\,000\,000(1+i\,)^{-3} + 7\,517\,488(\,1+i)^{-6}$ **0,75 pt**

Le taux est de10% **0,5 pt**

3. **a)** Calculer le taux semestriel équivalent au taux annuel de 10,25%.

$(\,1+i_s)^2 = 1+i_a$ **0,75 pt**

$i_s = 5\%.$ **0,5 pt**

b) Calculer le montant de la semestrialité.

- $8\,000\,000 = a \times \frac{1-(1{,}05\,)^{-10}}{0{,}05}\ (\,1{,}05)^{-3}$ **0,75 pt**
- Calcul achevé **0,5 pt**

PROBLEME **(10 points)**

Soit f la fonction définie par : $f(x) = 3x + \frac{3e^x}{2(e^x-1)}$ et (C_f) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (unité: 1cm).

1. Déterminer l'ensemble de définition D_f de la fonction f.

$D_f = \mathbb{R}^*$ **0,5 pt**

2. Calculer les limites de f aux bornes de l'ensemble de définition.

$\lim\limits_{-\infty} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{+\infty} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty$ **4 x 0,25 pt**

3. Justifier que (C_f) admet une asymptote parallèle à l'axe des ordonnées. On précisera son équation.

$\lim\limits_{0^-} f(x) = -\infty$; $\lim\limits_{0^+} f(x) = +\infty.$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à (C_f) parallèle à l'axe des ordonnées. **0,5 pt**

4. Montrer que la droite (D_1): $y = 3x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty\cdot$

$\lim\limits_{-\infty} f(x) - 3x = 0$. Donc, la droite (D_1): $y = 3x$ est asymptote oblique à (C_f) en $-\infty\cdot$ **0,5 pt**

5. **a)** Vérifier que pour tout $x \neq 0$, $f(x) = 3x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2(e^x-1)}\cdot$

$3x + \frac{3}{2} + \frac{3}{2(e^x-1)} = 3x + \frac{3(e^x-1)}{2(e^x-1)} + \frac{3}{2(e^x-1)} = \frac{3e^x-3+3}{2(e^x-1)} = \frac{3e^x}{2(e^x-1)} = f(x).$ **0,5 pt**

b) Montrer que la droite (D_2) : $y = 3x + \frac{3}{2}$ est asymptote oblique à (C_f) en $+\infty\cdot$

$\lim\limits_{+\infty} f(x) - \left(3x + \frac{3}{2}\right) = \lim\limits_{+\infty} \frac{3}{2(e^x-1)} = 0$ donc (D_2): $y = 3x + \frac{3}{2}$ est A.O en $+\infty$. **0,5 pt**

6. **a)** Montrer que pour tout réel x appartenant à D_f, $f'(x) = \frac{3(2e^{2x}-5e^x+2)}{2(e^x-1)^2}\cdot$ **1 pt**

$$f'(x) = \frac{3}{2}\,\frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x-1)^2}$$

b) Etudier le signe de $f'(x)$ suivant les valeurs de x.

$f'(x)$ a même signe $2e^{2x} - 5e^{x} + 2.$ **0,5 pt**

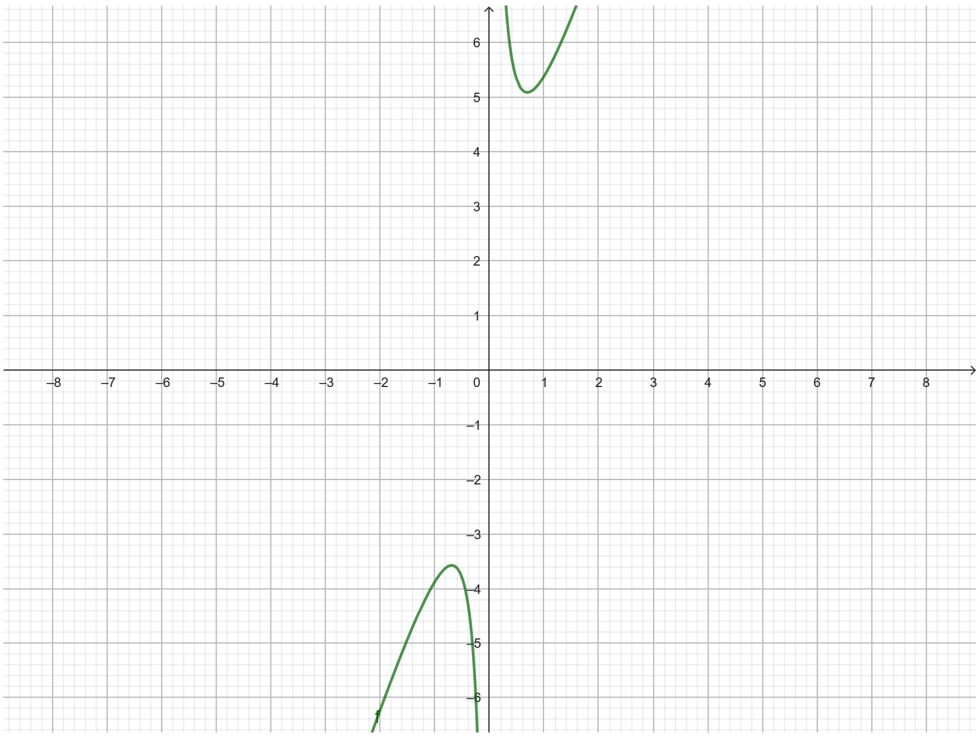
c) Dresser le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		$-\ln 2$		0		$\ln 2$		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	||	-	0	+	
f	$-\infty$	↗	f(-ln2)	↘	$-\infty$ || $+\infty$	↘	f(ln2)	↗	$+\infty$

$f(-\ln 2) = \frac{-3}{2} - 3\ln 2\,; f(\ln 2) = 3 + 3\ln 2$

0,75 pt

d) Tracer (C_f). **1 pt**



7. Soit h la restriction de f sur l'intervalle $]0\,,\ln 2[$.

a) Montrer que h est une bijection de $]0\,,\ln 2[$ vers un intervalle J à préciser.

Sur $]0;\ln 2[$, h est continue strictement décroissante donc elle est bijective de $]0;\ln 2[$ vers $]3 + 3\ln 2\,; +\infty[$. **0,75 pt**

b) Tracer la courbe $(C_{h^{-1}})$ de h^{-1}, la bijection réciproque de h, dans le plan muni du repère$(O\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$

Tracé de la courbe **0,5 pt**

8. a) Déterminer une primitive de la fonction g définie par $g(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

La fonction G définie sur $]0,+\infty[$ par $G(x) = ln(e^x - 1)$ est une primitive de g sur $]0,+\infty[$. **1 pt**

b) Calculer en cm² l'aire $\mathcal{A}$ de l'ensemble des points M du plan dont les coordonnées (x, y) vérifient :

$$\begin{cases} \ln 3 \ \leq x \ \leq \ln 5 \\ \ 0 \ \leq y \ \leq f(x) \end{cases}$$

$\mathcal{A} = \int_{ln}^{ln5} f(x)dx \times 1cm^2 = (F(\ln 5) - F(ln3)) \times 1cm^2$ où $F(x) = \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}ln(e^x - 1).$ **1 pt**