UNIVERSITE CHEIKH ANTA DIOP DE DAKAR
◆
OFFICE DU BACCALAUREAT
E. mail : office@ucad.edu.sn
site web : officedu bac.sn

20263T05AN01A29
Durée: 04 heures
Séries : STIDD – T1 Coef. 5
Série : T2 coef : 4
Epreuve du 1er groupe

MATHEMATIQUES

Exercice 1 (5 points)

I. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) suivante : $z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$.

1. Montrer que l'équation (E) admet une seule solution imaginaire pure que l'on déterminera. **0,5 pt**

2. a) Déterminer les racines carrées du nombres complexe $5 - 12i$. **0,5 pt**

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ l'équation (E). **0,5 pt**

II. Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points A, B, et C d'affixes respectives $z_A = -2i$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = -1 + 3i$.

1. Placer les points A, B, et C dans le plan complexe. **0,5 pt**

2. Déterminer l'argument principal de $\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}$, puis celui de $\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}$. **1 pt**

3. En déduire la nature exacte du triangle ABC. **1 pt**

4. Dans une vaste savane représentée par le plan complexe, il y a une zone herbacée représentée par l'ensemble des points M tels que : $\left\|7\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}\right\| < 13$.

Un mouton attaché à une position représentée par le point $D(2 + 2i)$ avec une corde de longueur 2 pourra- t- il brouter dans la zone herbacée ? **1 pt**

Exercice 2 (5 points)

Pour stocker ses récoltes, une petite entreprise agricole souhaite construire un hangar ayant la forme d'un tétraèdre irrégulier pour s'adapter à une zone accidentée.

Les ingénieurs ont modélisé la structure dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O\,;\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$ où l'unité est le mètre.

Les quatre sommets du hangar sont représentés par les points $A(2,0,0)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,3)$ et $S(x,y,6)$ où S représente le sommet supérieur du hangar.

1. Justifier que les points A, B et C définissent un plan. **0,5 pt**

2. Pour des raisons de stabilité, le projeté orthogonal du sommet S sur le plan ABC doit coïncider avec le centre de gravité G du triangle ABC.

a) Montrer que le point G a pour coordonnées $\left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}, 1\right)$. **0,5 pt**

b) En déduire que $x = \frac{49}{6}$ et $y = \frac{61}{12}$. **1,5 pt**

3. Le hangar est destiné à stocker des graines dont la masse volumique est **600 kg / m³.**

Sachant que graines sont emballées dans des sacs de **50** kilogrammes, déterminer le nombre maximal de sacs que pourrait contenir ce hangar. **2,5 pts**

On négligera le volume occupé par les sacs vides.

Problème (10 points)

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire (02,5 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x-1)e^{x} - 3$.

1. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$ · **0,75 pt**

2. Calculer l'expression $g'(x)$ de la dérivée de g, étudier son signe puis établir le tableau de variations de g. **1 pt**

3. **a)** Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique α et que $1 < \alpha < 2$. **0,5 pt**

b) En déduire le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x. **0,25 pt**

Partie B : Étude de la fonction principale (07,5 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+1)e^{-2x} - 3x$.

On note (C) la courbe représentative de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O\,;\vec{i},\vec{j})$.
(*L'unité graphique est 2* cm)

1. **a)** Déterminer la limite de f en $-\infty$ · **0,5 pt**

b. i) Vérifier que pour tout réel x non nul, on a : $f(x) = x\left[\frac{1}{e^{2x}} + \frac{1}{xe^{2x}} - 3\right]$ · **0,5 pt**

b. ii) Déterminer alors la limite de f en $+\infty$. **0,5 pt**

2. **a)** Montrer que la droite (D) d'équation : $y = -3x$ est asymptote à la courbe (C) en $+\infty$ · **0,5 pt**

b) Étudier, en fonction des valeurs de x, les positions relatives de (D) et (C). **0,5 pt**

3. **a)** Vérifier que pour tout réel x, on a : $f'(x) = g(-2x)$. **0,5 pt**

b) Montrer alors que $f'(x) \geq 0$ si, et seulement si x appartient à $\left]-\infty\,, -\frac{\alpha}{2}\right]$ · **0,5 pt**

c) Dresser le tableau de variation de f. **1 pt**

4. **a)** Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) en son point A d'abscisse 0. **0,5 pt**

b) Tracer (C), la tangente (T) et l'asymptote (D) dans le plan muni du repère $(O\,;\vec{i},\vec{j})$ · **1 pt**

5. Soit $I = \int_0^1 (x+1)e^{-2x}dx$.

a) Calculer I à l'aide d'une intégration par parties. **1 pt**

b) En déduire l'aire du domaine plan, en cm^2, délimitée par la courbe (C), la droite (D) et les droites d'équation $x = -1$ et $x = 0$. **0,5 pt**