



MATHEMATIQUES

Exercice 1 (5 points)

Soit P le polynôme dans \mathbb{C} défini par : $P(z) = z^3 - 2(1 + 2i)z^2 + 7iz + 3(1 - 3i)$.

1. Montrer que P admet une racine imaginaire pure que l'on déterminera. **1 pt**
2. Résoudre alors l'équation : $P(z) = 0$. **1,5 pt**
3. Dans le plan complexe, on considère les points $A(3i)$, $B(1 - i)$ et $C(1 + 2i)$.
Déterminer l'affixe z_D du point D tel que le quadrilatère $ACBD$ soit un parallélogramme. **1 pt**
4. Les points C , D et $E(2)$ représentent les positions respectives de 3 villages d'un même terroir.
Un fils du terroir souhaiterait offrir un forage aux 3 villages à une position équidistante des trois villages.
Quel devrait l'affixe ω du point Ω représentant la position du forage ? **1,5 pt**

Exercice 2 (5 points)

Une entreprise pharmaceutique souhaite expédier des échantillons de médicaments dans des caisses.

Le prototype de caisse est représenté, dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, par la figure $ABCS$ où $A(4, 0, 0)$, $B(0, 4, 0)$, $C(0, 0, 4)$ et $S(4, 4, 4)$ représentent les sommets de la caisse.

L'unité est le décimètre.

1. Justifie que les points A , B et C définissent un plan. **0,5 pt**
2. Déterminer une équation cartésienne du plan ABC . **1 pt**
3. Justifie que les points A , B , C et S sont les sommets d'un tétraèdre. **1,5 pt**
4. L'entreprise souhaite remplir ces caisses avec des petites boîtes de médicaments parallélépipédiques de dimensions 5 cm, 3 cm et 2 cm.
Quel est le nombre maximum de boîtes que pourrait contenir une caisse ? **2 pts**

Problème (10 points)

Partie I (02,75 points)

Soit g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{1}{2} \ln x - 1$.

1. Calculer les limites de g en 0^+ et en $+\infty$. 1 pt
2. a) Calculer l'expression $g'(x)$ de la fonction dérivée g' de g . 0,5 pt
 b) En déduire le sens de variation de g sur $]0, +\infty[$ 0,5 pt
3. Calculer $g(1)$ puis en déduire le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles $]0, 1]$ et $[1, +\infty[$. 0,75 pt

Partie II (05,75 points)

On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \frac{1}{2} \ln x$ et on note (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 2 cm.

1. a) Calculer la limite en 1 de $f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat obtenu. 0,75 pt
 b) Calculer la limite en $+\infty$ de $f(x)$ puis calculer la limite en $+\infty$ de $\frac{f(x)}{x}$. 1 pt
 c) Calculer la limite en $+\infty$ de $[f(x) - x]$, puis interpréter géométriquement le résultat. 1 pt
2. a) Montrer que pour tout réel x appartenant à $]0, +\infty[$, $f(x) - x = g(x)$. 0,5 pt
 b) En déduire la position de (C) par rapport à la droite (Δ) d'équation $y = x$. 0,5 pt
3. a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que pour tout réel x appartenant à $]0, +\infty[$, on a : 0,5 pt

$$f'(x) = \frac{(x-1)(2x^2 + 5x + 1)}{2x(x+1)^2}.$$

- b) Dresser le tableau de variations de f . 0,75 pt
4. a) Tracer (C) et la droite $(\Delta) : y = x$ dans le plan muni du repère $(O ; \vec{i}, \vec{j})$. 0,75 pt

Partie III (01,5 points)

Soit G la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $G(x) = 2\ln(1+x) - \frac{1}{2}x \ln x - \frac{x}{2}$.

1. Montrer que G est une primitive de g sur $]0, +\infty[$. 0,5 pt
2. Calculer en cm^2 l'aire du domaine délimité par (C) , (Δ) et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$. 1 pt